

## A closed form solution of the Laplace equation for hydraulic head distribution in a circular aquifer with a pumping well at an arbitrary location

Ahmadreza. Karimipour<sup>\*1</sup>, Saleh. Yousefi<sup>†</sup>

### Extended Abstract

#### Introduction:

Circular aquifers, such as those found in karst systems or fault-bounded basins, are common in nature and require precise modeling to understand their response to pumping. While extensive analytical solutions exist for rectangular, triangular, and semi-infinite aquifers, a comprehensive closed-form analytical solution for a finite circular aquifer with an arbitrarily located well has been notably absent. Previous studies have primarily focused on simpler geometries or relied on numerical approximations, leaving a gap in the direct analytical treatment of circular domains under pumping conditions. This study addresses this gap by developing a rigorous mathematical model capable of accurately predicting hydraulic head distribution and flow potential in a confined, homogeneous, and isotropic circular aquifer. The proposed solution eliminates the need for numerical discretization, offering a direct and computationally efficient tool for groundwater management in circular or near-circular aquifer systems.

#### Materials and Methods:

This study presents a rigorous closed-form analytical solution for modeling groundwater flow to a pumping well in a finite, homogeneous, isotropic, and confined circular aquifer. The aquifer has a fixed radius  $b$ , and the well, with an infinitesimal radius, is positioned arbitrarily at coordinates  $(r_0, \theta_0)$  with a constant pumping rate  $Q$ . The mathematical formulation begins with the governing partial differential equation in polar coordinates, which is the Poisson equation incorporating a point source term:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{Q}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)$$

where  $\phi(r, \theta)$  is the hydraulic head, and the right-hand side uses the Dirac delta function  $\delta$  to localize the source/sink. The physical constraints are enforced by two boundary conditions: (1) the head remains finite at the origin  $\lim_{r \rightarrow 0} |\phi| < \infty$ , and (2) the head is constant (set to zero) at the outer circular boundary,  $\phi(b, \theta) = 0$ .

The solution methodology employs the Green's function approach combined with a Fourier series expansion. First, the unknown potential is expanded into a full trigonometric series:

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2} \phi_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_{nc}(r) \cos n\theta + \phi_{ns}(r) \sin n\theta)$$

A similar expansion is applied to the source term. Substituting these series into the governing PDE decomposes the two-dimensional problem into an infinite set of one-dimensional ordinary differential equations for the radial coefficients  $\phi_n(r)$ . The core of the solution is the construction of the Green's function  $G(r, \theta; \rho, \psi)$  for the corresponding Dirichlet boundary-value problem on a circle. Due to different fundamental solutions, the cases for  $n=0$  and  $n \geq 1$  are treated separately. For  $n=0$ , the radial component is logarithmic:

$$g_0(r, \rho) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\rho}{b}\right) & \text{for } r \leq \rho \\ \ln\left(\frac{r}{b}\right) & \text{for } r \geq \rho \end{cases}$$

For  $n \geq 1$ , the solution involves power laws:

<sup>1</sup>- Soil Conservation and Watershed Management Research Department, Chaharmahal and Bakhtiari Agricultural and Natural Resources Research and Education Center, AREEO, Shahrekord, Iran.

<sup>2</sup>- Soil Conservation and Watershed Management Research Department, Chaharmahal and Bakhtiari Agricultural and Natural Resources Research and Education Center, AREEO, Shahrekord, Iran.

\* Corresponding Author: [a.karimipour@areeo.ac.ir](mailto:a.karimipour@areeo.ac.ir)

Received: 2026/01/01

Accept: 2026/02/15

$$g_n(r, \rho) = \frac{1}{2n} \begin{cases} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^n & r \leq \rho \\ \left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^n & r \geq \rho \end{cases}$$

The complete Green's function is then:

$$G(r, \theta; \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} [g_0(r, \rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r, \rho) \cos n(\theta - \psi)]$$

The final expression for the hydraulic head is obtained via convolution and simplifies, after applying the properties of the delta function, to a closed-form series solution:

$$\phi(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^b G(r, \theta; \rho, \psi) \times \frac{Q}{r} \delta(\rho - r_0) \delta(\psi - \theta_0) \rho d\rho d\psi$$

This infinite series can be summed analytically using known identities, resulting in compact algebraic formulas valid in the regions  $r \leq r_0$  and  $r \geq r_0$ . The analytical results were successfully validated against a finite-element numerical model.

### Results and Discussions:

The application of the developed analytical solution to a confined circular aquifer with parameters  $b=7\text{m}$ ,  $r_0=3\text{m}$ ,  $\theta_0=50^\circ$ ,  $Q=-100 \text{ m}^3/\text{d}$ , and  $T=5 \text{ m}^2/\text{d}$  revealed several key hydraulic behaviors. The primary outcome is the clear asymmetric drawdown distribution resulting from the well's off-center position. The drawdown cone is deepest immediately around the well location and becomes progressively shallower with increasing radial distance, visualized in the dimensionless drawdown contour plot. The non-concentric nature of the equipotential lines is distinctly captured in the hydraulic head contour map, where contours are elliptical and skewed away from the geometric center of the aquifer, demonstrating that symmetry is broken when the well is not at the center. A detailed analysis of drawdown profiles along various angular directions relative to the well's azimuth further quantified this asymmetry. The maximum drawdown occurs precisely along the radial line corresponding to the well's own azimuth ( $\theta=50^\circ$ ). As the angular deviation from this direction increases, the drawdown magnitude at a given radial distance systematically decreases. For instance, the drawdown along  $\theta=67.5^\circ$  is less than that at  $\theta=50^\circ$ , and the profile along  $\theta=90^\circ$  shows even lower values. This pattern conclusively illustrates how the aquifer's circular geometry and the well's specific location jointly control the spatial pattern of the cone of depression. Validation against a numerical model confirmed the high accuracy and reliability of the analytical solution. A finite-element model was constructed for the identical aquifer setup. A comparison of the drawdown versus radial distance profiles along two distinct directions ( $\theta=67.5^\circ$  and  $\theta=90^\circ$ ) showed nearly perfect overlap between the analytical and numerical results. The minor discrepancies were within negligible numerical tolerance, verifying that the closed-form solution correctly solves the governing equations and boundary conditions without the approximations required in numerical discretization. This successful validation establishes the solution as a robust and efficient tool for predicting head distributions in finite circular aquifers.

### Conclusion:

This study successfully developed a rigorous closed-form analytical solution for predicting hydraulic head distribution and drawdown in a finite, confined, circular aquifer subjected to pumping from a well at an arbitrary location. By employing Green's function and Fourier series techniques, the governing equation was solved analytically, resulting in a direct mathematical formula. The solution efficiently captures the asymmetric hydraulic response caused by an off-center well, eliminating the need for numerical approximations. Validation against a finite element model demonstrated excellent agreement, confirming the solution's accuracy. This analytical tool provides a practical and efficient means for well placement optimization, capture zone delineation, and management of circular or near-circular aquifers, such as karst systems. The methodological framework established here also holds potential for extension to more complex hydrological conditions, including heterogeneous or anisotropic properties.

**Keywords:** Analytical Solution, Circular Aquifer, Drawdown, Green's Function, Well Pumping.

**Citation:** Ahmadrza. Karimipour, A.R., Yousefi, S., 2026. A closed form solution of the Laplace equation for hydraulic head distribution in a circular aquifer with a pumping well at an arbitrary location. Iranian Water Research Journal, 20(60), pp. 115-128. <https://doi.org/10.22034/iwrj.2026.14856.2623>

**Copyright:** © Authors, Published by Iranian Water Research Journal. This is an open-access article distributed under the CC-BY 4.0 (license <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> ).



## حل بسته‌ی معادله لاپلاس برای توزیع هد هیدرولیکی در آبخوان دایره‌ای با چاه پمپاژ در موقعیت دلخواه

احمدرضا کریمی پور\*<sup>۱</sup>، صالح یوسفی<sup>۲</sup>

### چکیده

آبخوان‌های دایره‌ای ممکن است در طبیعت یافت شوند. این پژوهش یک راه‌حل ریاضی دقیق و کامل برای مدل‌سازی رفتار هیدرولیکی یک آبخوان دایره‌ای تحت اثر پمپاژ را ارائه می‌دهد. این راه‌حل می‌تواند به‌عنوان ابزاری کارآمد برای درک بهتر رفتار هیدرودینامیکی آبخوان‌های دایره‌ای و طراحی بهینه‌ی چاه‌های پمپاژ مورد استفاده قرار گیرد. با فرض همگن و ایزوتروپ بودن آبخوان، معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی در شرایط پایدار با استفاده از روش تابع گرین و بسط سری فوریه حل شد. راه‌حل نهایی به یک فرمول ریاضی بسته و مستقیم تبدیل شد که محاسبات را بسیار آسان می‌کند. این فرمول امکان محاسبه‌ی توزیع هد هیدرولیکی و تابع پتانسیل جریان را در هر نقطه از آبخوان و برای هر محل دلخواه چاه فراهم می‌نماید. نتایج نشان داد که به دلیل قرارگیری چاه در موقعیتی غیرمرکزی (در فاصله ۳ متری از مرکز با زاویه ۵۰ درجه نسبت به افق)، توزیع هیدرولیکی در اطراف آن کاملاً متقارن نیست. در راستای موقعیت چاه (در راستای ۵۰ درجه نسبت به افق)، افت سطح آب به طور محسوسی بیشتر از راستای عمود بر آن (۹۰ درجه) بود که نشان‌دهنده تأثیر قوی موقعیت غیرمرکزی چاه بر توزیع نامتقارن مخروط افت است. برای اعتبارسنجی حل تحلیلی ارائه شده، نتایج آن با یک شبیه‌سازی عددی مبتنی بر روش اجزای محدود در نرم‌افزار متلب مقایسه شد. این مقایسه به صورت کمی و با استفاده از پروفیل‌های افت سطح آب در دو راستای زاویه‌ی  $\theta=67.5^\circ$  و  $\theta=90^\circ$  انجام گرفت. برای سنجش میزان انطباق، از شاخص‌های آماری ضریب تعیین ( $R^2$ ) و خطای ریشه میانگین مربعات (RMSE) استفاده شد. محاسبات نشان داد که مقادیر این شاخص‌ها، به ترتیب ۰/۹۶ و ۰/۰۶ می‌باشد که بیانگر همبستگی و انطباق بسیار خوب بین دو مجموعه داده است. این نتایج، قابلیت اطمینان بالای حل تحلیلی ارائه شده را تأیید می‌کنند و نشان می‌دهند که این راه‌حل می‌تواند به‌عنوان ابزاری کارآمد برای درک بهتر رفتار هیدرودینامیکی آبخوان‌های دایره‌ای و طراحی بهینه‌ی چاه‌های پمپاژ استفاده شود.

**واژه‌های کلیدی:** آبخوان دایره‌ای، پمپاژ چاه، تابع گرین، شعاع تاثیر، حل تحلیلی، هد هیدرولیکی

**ارجاع:** کریمی پور، ار.، یوسفی، ص.، ۱۴۰۵. حل بسته‌ی معادله لاپلاس برای توزیع هد هیدرولیکی در آبخوان دایره‌ای با چاه پمپاژ در موقعیت دلخواه. مجله پژوهش آب ایران، ۲۰(۶۰)، صص. ۱۱۵-۱۲۸. <https://doi.org/10.22034/iwrj.2026.14856.2623>

۱ - گروه تحقیقات حفاظت خاک و آبخیزداری، مرکز تحقیقات و آموزش کشاورزی و منابع طبیعی استان چهارمحال و بختیاری، سازمان تحقیقات، آموزش و ترویج کشاورزی، شهرکرد، ایران.  
۲ - گروه تحقیقات حفاظت خاک و آبخیزداری، مرکز تحقیقات و آموزش کشاورزی و منابع طبیعی استان چهارمحال و بختیاری، سازمان تحقیقات، آموزش و ترویج کشاورزی، شهرکرد، ایران.

\* نویسنده مسئول: [a.karimipour@areeo.ac.ir](mailto:a.karimipour@areeo.ac.ir)

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۲۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۱۱

## مقدمه

علی‌رغم این گستره وسیع از دستاوردهای تحلیلی برای هندسه‌های مستطیلی، مثلثی یا نیمه‌بی‌نهایت، یک خلأ پژوهشی به چشم می‌خورد: عدم ارائه یک راه‌حل تحلیلی بسته (Closed-form) برای یک آبخوان با هندسه دایره‌ای محدود که در آن یک چاه پمپاژ در موقعیتی کاملاً دلخواه (غیرمرکزی) قرار دارد؛ این در حالی است که چنین آبخوان‌هایی در سیستم‌های طبیعی مانند ساختارهای کارستی یا حوضه‌های محصورشده با گسل‌های حلقوی در طبیعت یافت می‌شوند. نبود این راه‌حل، مهندسان را برای تحلیل، طراحی و بهینه‌سازی بهره‌برداری از این منابع ارزشمند، کاملاً به روش‌های عددی وابسته کرده است که علی‌رغم قابلیت‌های بالا، نیازمند زمان، هزینه و داده‌های ورودی بیشتری هستند و امکان بررسی سریع و تحلیل حساسیت پارامترها را به آسانی فراهم نمی‌کنند.

پرکردن این خلأ فنی، ضرورتی علمی و کاربردی برای تکمیل ابزار تحلیلی مهندسی آب زیرزمینی و ارتقای کیفیت مدیریت آبخوان‌های دایره‌ای شکل به‌شمار می‌رود. دسترسی به یک فرمول تحلیلی مستقیم، امکان ارزیابی فوری تأثیر موقعیت چاه بر توزیع نامتقارن افت سطح آب، ترسیم دقیق محدوده آنگیری و بهینه‌سازی مکان‌یابی چاه را با سرعت و دقت بالایی ممکن می‌سازد.

بر این اساس، هدف اصلی و نوآوری این پژوهش، توسعه و ارائه اولین راه‌حل تحلیلی بسته، کامل و ریاضی برای معادله لاپلاس (پواسون) حاکم بر جریان پایدار در یک آبخوان محصور، همگن و ایزوتروپ دایره‌ای است که در آن یک چاه با موقعیت قطبی دلخواه  $(r_0, \theta_0)$  و با نرخ پمپاژ ثابت  $Q$  واقع شده است. برای دستیابی به این هدف، از روش تابع گرین همراه با بسط سری فوریه در مختصات قطبی استفاده می‌شود تا میدان کامل پتانسیل (هد هیدرولیکی) به صورت یک فرمول جبری مستقیم و بدون نیاز به هیچ گونه گسسته‌سازی و یا با تقریب عددی استخراج گردد. این راه‌حل نه تنها خلأ موجود در این زمینه را پر می‌کند، بلکه با تبدیل یک مسأله مهندسی به یک فرمول محاسباتی ساده، ابزاری کارآمد، سریع و قابل اعتماد را برای طراحی بهینه چاه‌ها، تحلیل حساسیت، ترسیم منحنی‌های همتراز افت و مدیریت آبخوان‌های دایره‌ای یا نزدیک به دایره را در اختیار مهندسان آب قرار می‌دهد و گامی ضروری در راستای افزایش دقت و کاهش هزینه‌های مطالعات هیدروژئولوژیک برمی‌دارد.

Moheghian and Asadi Aghbolaghi (2015) یک راه حل تحلیلی برای بررسی نوسانات آب زیرزمینی ناشی از جزر و

مدیریت پایدار منابع آب زیرزمینی مستلزم درک کمی و کیفی واکنش آبخوان‌ها در برابر عوامل مؤثری مانند پمپاژ از چاه‌هاست. در این راستا، دو رویکرد اصلی مدلسازی، یعنی روش‌های تحلیلی و عددی، هر کدام جایگاه ویژه‌ای دارند. در کنار روش‌های عددی، روش‌های تحلیلی نیز به عنوان ابزارهایی قدرتمند در مدلسازی هیدروژئولوژیک مطرح هستند. این راه‌حل‌ها که پاسخ‌های دقیق ریاضی به معادلات حاکم تحت فرضیات معین (همچون همگنی و ایزوتروپی) ارائه می‌دهند، امکان تحلیل سریع، کارآمد و بینش عمیق‌تر نسبت به مکانیزم‌های بنیادی جریان را فراهم می‌سازند. این امر به ویژه در مراحل اولیه طراحی، بررسی سناریوهای مختلف و بهینه‌سازی اولیه، مزیت قابل توجهی محسوب می‌شود. البته، در مسائل پیچیده با شرایط ناهمگن، ناهمسان و هندسه‌های نامنظم که فرضیات روش‌های تحلیلی به طور کامل برقرار نیست، روش‌های عددی انعطاف‌پذیری و قابلیت بیشتری برای شبیه‌سازی واقع‌گرایانه ارائه می‌دهند. بنابراین، انتخاب روش مناسب می‌بایست با در نظر گرفتن هدف مطالعه، پیچیدگی مسئله و محدودیت‌های هر یک از رویکردها صورت پذیرد.

با این وجود، توسعه راه‌حل‌های تحلیلی برای هندسه‌ها و شرایط مرزی مختلف همواره به عنوان یکی از محورهای اصلی تحقیقات هیدروژئولوژیک مطرح بوده است. پژوهش‌های پیشین موفق به ارائه راه‌حل‌های تحلیلی برای مسائل متنوعی شده‌اند: از جمله تحلیل آبخوان‌های مستطیلی تحت تأثیر تغییرات سطح آب رودخانه (Mahdavi, 2015)، تعامل با نهرها (Upadhyaya and Chauhan, 2001 و Huang et al., 2014) مدلسازی جریان به سمت چاه در آبخوان‌های مثلثی

(Asadi-Aghbolaghi and Seyyedean, 2010) و بررسی پدیده تغذیه ناشی از بارش در این آبخوان‌ها (Kacimov et al., 2016; Mahdavi and Seyyedean., 2014). راه‌حل‌هایی برای آبخوان‌های نشتی (Mahdavi, 2019)، تحلیل تبادل آب و املاح بین رودخانه و آبخوان (Xie et al., 2016)، پیش‌بینی اثر پمپاژ بر سطح آب در مجاورت نهرهای نیمه‌تراوا (Intaraprasong and Zhan, 2007)، تعیین نرخ بحرانی پمپاژ (Asadi-Aghbolaghi et al., 2013)، بررسی پاسخ آبخوان به نوسانات جزر و مد (Chuang and Yeh, 2007; Xia et al., 2011) و حتی ارائه چارچوب‌های تحلیلی برای محاسبه نشت و ذخیره ساحلی (Barlow et al., 2000) توسعه یافته‌اند.

بر آبخوان دایره‌ای محدود تمرکز کرده که در پدیده‌های طبیعی مانند سیستم‌های کارستی رایج است. یک تمایز مهم دیگر، در نظر گرفتن موقعیت چاه است. در گذشته چاه معمولاً در مرکز یا موقعیت‌های متقارن خاصی فرض می‌شد، اما در این روش، چاه می‌تواند در هر نقطه دلخواه داخل دایره قرار گیرد. از نظر نوع راه‌حل، این پژوهش برخلاف روش‌های عددی یا نیمه تحلیلی رایج، یک حل تحلیلی دقیق و بسته بر پایه تابع گرین و بسط فوریه ارائه می‌دهد که نیاز به تقریب‌های عددی را برطرف می‌کند. در کاربرد عملی، راه حل ارائه شده به یک فرمول جبری تبدیل شده که محاسبات را برای آبخوان‌های طبیعی تقریباً دایره‌ای بسیار سریع و کارآمد می‌کند. همچنین، این روش به‌طور دقیق اثر عدم تقارن ناشی از موقعیت غیرمرکزی چاه را نشان می‌دهد و شکل مخروط افت بیضوی و خطوط هم‌تراز نامتقارن هد را مدل می‌کند. دستاوردهای مهم این کار عبارتند از پر کردن خلأ مطالعات برای آبخوان دایره‌ای محدود، ارائه راه‌حل مستقیم و کارآمد که نیاز به گسسته‌سازی عددی را حذف می‌کند، ایجاد ابزار عملی برای بهینه‌سازی مکان چاه و مطالعه حساسیت و ایجاد فرمولاسیون ریاضی که می‌تواند برای شرایط پیچیده‌تر توسعه یابد. در نتیجه، این پژوهش برای اولین بار یک راه‌حل ریاضی دقیق و آماده در اختیار ما می‌گذارد که می‌تواند توزیع هد هیدرولیکی، شکل مخروط افت و پتانسیل جریان را در یک آبخوان دایره‌ای محصور با چاه در هر نقطه‌ای، تنها با وارد کردن پارامترهای اصلی و بدون اجرای شبیه‌سازی عددی، محاسبه کند. سرعت، دقت و سهولت، تمایز عمده این کار با روش‌های پیشین است.

## مواد و روش‌ها

### مدل ریاضی

#### تابع هد هیدرولیکی

برای حل معادله حاکم بر آبخوان مورد نظر، چندین فرض ساده‌کننده به شرح زیر در نظر گرفته شده است:

- جریان آب زیرزمینی در صفحه دو بعدی است.
- آبخوان همگن و ایزوتروپیک است و ضریب انتقال پذیری ( $T$ ) و هدایت هیدرولیکی ( $k$ ) ثابتی دارد.
- آبخوان دایره‌ای محدود با هد ثابت در مرز یا  $\varphi(b, \theta) = 0$  است (شکل ۱).

۴. یک چاه کامل با موقعیت دلخواه در داخل آبخوان کاملاً نفوذپذیر، با شعاع بی‌نهایت کوچک و با نرخ برداشت ثابت در نظر گرفته شده است.

مد در یک سیستم آبخوان ساحلی ناهمگن با طول محدود توسعه دادند که شامل یک آبخوان آزاد در بالا، یک آبخوان نیمه‌محصور در پایین و یک لایه نیمه‌تراوا بین آن‌ها بود و تمام لایه‌ها به صورت ناهمگن در نظر گرفته شدند. برای بررسی نتایج، پارامترهای بدون بعدی مانند  $L_1$  و  $L_2$  معرفی شدند که به ترتیب نشان‌دهنده نشت در لایه نیمه‌تراوا و سمت چپ و راست بودند. نتایج نشان داد که دامنه نوسانات در آبخوان آزاد با افزایش نشت افزایش می‌یابد، اما در آبخوان نیمه‌محصور کاهش پیدا می‌کند. زمانی که طول آبخوان در دو طرف برابر ۱۰۰ متر باشد، برای مقادیر خاصی از نشت، کمترین دامنه نوسانات به ترتیب در فواصل ۲۰، ۳۵ و ۵۰ متر رخ می‌دهد. همچنین افزایش ضریب ذخیره در آبخوان آزاد باعث کاهش نوسانات سطح آب می‌شود، در حالی که در آبخوان نیمه‌محصور تغییرات این ضریب تأثیر چشمگیری ندارد و نوسانات تقریباً ثابت می‌ماند. از سوی دیگر، افزایش ضریب انتقال در هر دو نوع آبخوان (آزاد و نیمه‌محصور) منجر به افزایش دامنه نوسانات سطح آب می‌گردد.

(Shah Hosseini et al. (2018) در مطالعه‌ای تحلیلی به بررسی هندسه پایدار پیچان‌رودها پرداخته و تأکید کردند که برقراری تعادل بین شکل و ابعاد مقطع هندسی رودخانه و شیب طولی آن با شرایط هیدرولیکی و رسوبی حاکم، یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های رفتاری مورد توجه مهندسان رودخانه است. هدف اصلی و نوآوری این تحقیق، استخراج تحلیلی روابط هندسه هیدرولیکی با لحاظ کردن اثر جریان ثانویه در پیچان‌رودها و در محدوده سینوسیته  $1/25$  تا  $2/5$  بود. در این راستا، مبانی تئوری رژیم و روابط هندسه هیدرولیکی مرور شد و با استفاده از چهار معادله پیوستگی، مقاومت جریان، تابع شیلدز و جریان ثانویه، روابط مورد نظر به صورت تحلیلی به دست آمد. پس از واسنجی مدل، نتایج محاسباتی تطابق نسبتاً خوبی با داده‌های مشاهداتی نشان دادند، هرچند اختلاف‌هایی نیز مشاهده شد که به فرضیات در نظر گرفته شده در مدل نسبت داده شد. به‌منظور بررسی میزان حساسیت مدل به پارامترهای ورودی، حساسیت‌سنجی با تغییر هر یک از پارامترها و ثابت نگه‌داشتن سایر عوامل انجام گرفت که نتایج آن نشان‌دهنده تأثیر قابل توجه تغییرات پارامترها بر خروجی‌های مدل بود.

نوآوری اصلی این پژوهش، ارائه یک حل تحلیلی بسته و کامل برای آبخوان دایره‌ای محدود با چاه پمپاژ در موقعیت دلخواه است. این مسئله تا پیش از این به صورت تحلیلی و دقیق حل نشده است. مطالعات پیشین عمدتاً بر آبخوان‌های مستطیلی، مثلثی یا نیمه بی‌نهایت متمرکز بوده‌اند، در حالی که این تحقیق

وجود ندارد. اگر چاه در مرکز بود، انتظار داشتیم هد در آن نقطه به دلیل پمپاژ کاهش یابد، اما همچنان مقدار آن باید متناهی باشد. شرط مرزی دوم، شرط مرزی خارج (r=b) یا  $\phi(b, \theta) = 0$  است. تفسیر این شرط بدین شرح است: در لبه دایره‌ای آبخوان با شعاع (b)، هد هیدرولیکی ثابت و برابر با یک مقدار مرجع (در اینجا صفر) در نظر گرفته می‌شود. این شرط نشان‌دهنده یک مرز هیدرولیکی ثابت است، مانند یک رودخانه یا دریاچه که سطح آب آن تغییر نمی‌کند یا یک منطقه با هد ثابت که به عنوان مرز جریان عمل می‌کند. این شرط باعث می‌شود که تأثیر پمپاژ چاه در مرز آبخوان احساس نشود، یعنی آب از منبع بیرونی (مثلاً رودخانه) به داخل آبخوان جریان یابد تا جبران پمپاژ شود. در این تحقیق شرایط اولیه (Initial Conditions) مطرح نیست، زیرا مسئله وابسته به زمان (Transient) نبوده و مقدار تابع در زمان آغازین تعریف نمی‌شود.

راه حل تحلیلی closed form برای مسئله فوق الذکر با استفاده از تابع گرین و با دنبال کردن مراحل زیر به دست می‌آید:

حل:

در روش بسط تابع ویژه، منظور این است که پاسخ معادله اصلی (معادله ۱) تحت شرایط مرزی (۲) به صورت یک انتگرال به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\phi(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^b G(r, \theta; \rho, \psi) f(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi \quad (3)$$

و در نهایت تابع گرین (G) تعیین می‌شود.

ابتدا جواب تابع  $\Phi(r, \theta)$  از مساله شرح داده شده توسط روابط (۱) و (۲) به صورت یک سری فوریه مثلثاتی به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2} \phi_0(r) + \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\phi_{nc}(r) \cos n\theta + \phi_{ns}(r) \sin n\theta)$$

ترم سمت راست معادله (۱)، یعنی  $f(r, \theta)$  را نیز می‌توان به صورت یک سری فوریه به صورت زیر نمایش داد.

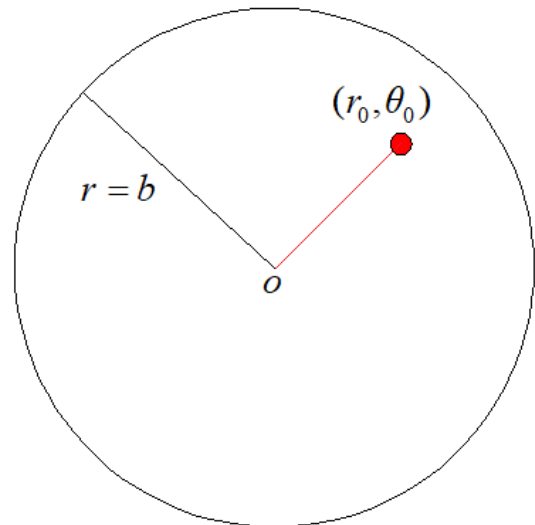
$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} f_0(r) + \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_{nc}(r) \cos n\theta + f_{ns}(r) \sin n\theta)$$

با استفاده از مختصات قطبی  $(r, \theta)$ ، معادله حاکم بر آبخوان با معادله زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = f(r, \theta) \quad (1)$$

که در آن  $f(r, \theta) = \frac{Q}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)$  است. در این معادله،  $\Phi$  نشان دهنده تابع پتانسیل و  $\delta$  تابع دلتای دیراک نشان دهنده انتقال جرم در محل چاه  $(r_0, \theta_0)$  با نرخ پمپاژ Q است، که علامت مثبت Q نشان دهنده تزریق و علامت منفی نشان دهنده پمپاژ است.



شکل ۱- نمایش شماتیک سفره آب زیرزمینی دایره‌ای که جریان چاه را نشان می‌دهد. نقطه توپر موقعیت چاه را در مختصات دلخواه  $(r_0, \theta_0)$  نشان می‌دهد.

برای فرموله کردن مسئله، شرایط مرزی بر حسب تابع پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شوند که منعکس کننده واقعیت فیزیکی سیستم است (روی یک دایره  $\Omega = \{0 < r < b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  با شعاع b). شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\phi(r, \theta)| < \infty \text{ and } \phi(b, \theta) = 0 \quad (2)$$

تفسیر شرط مرزی در مرکز آبخوان ( $r=0$ ) یا  $\lim_{r \rightarrow 0} |\phi(r, \theta)| < \infty$  بدین صورت است که هد هیدرولیکی در مرکز هندسی آبخوان باید مقدار محدود و معقولی داشته باشد. این شرط مانع از آن می‌شود که حل ریاضی در نقطه مرکز به بینهایت میل کند، که از نظر فیزیکی غیرممکن است. دلیل لحاظ کردن این شرط آن است که چاه پمپاژ در نقطه‌ای غیر از مرکز ( $r_0 > 0$ ) قرار دارد، بنابراین در خود مرکز چاهی

$$\phi_0(r) = \int_0^r \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) f_0(\rho) \rho d\rho + D_1 \ln(r) + D_2 \quad (15)$$

ضرایب  $D_1$  و  $D_2$  برابر است با:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = -\int_0^b \ln\left(\frac{\rho}{b}\right) f_0(\rho) \rho d\rho$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی در معادله (۹)، مقادیر ثابت به دست می‌آید. با جایگذاری این مقادیر ثابت در معادله فوق برای  $\phi_0(r)$ ، جواب مسئله مقدار مرزی توصیف شده توسط معادلات (۸) و (۹) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\phi_0(r) = \int_0^r \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) f_0(\rho) \rho d\rho \quad (16)$$

$$- \int_0^b \ln\left(\frac{\rho}{b}\right) f_0(\rho) \rho d\rho$$

که می‌توان آن را به صورت انتگرال زیر بازنویسی کرد:

$$\phi_0(r) = \int_0^b g_0(r, \rho) f_0(\rho) \rho d\rho \quad (17)$$

در معادله (۱۷)،  $g_0(r, \rho)$  به صورت زیر می‌باشد:

$$g_0(r, \rho) = - \begin{cases} \ln\left(\frac{\rho}{b}\right) & \text{for } r \leq \rho \\ \ln\left(\frac{r}{b}\right) & \text{for } r \geq \rho \end{cases} \quad (18)$$

که نشان دهنده تابع گرین مسئله همگن مربوط به روابط (۸) و (۹) است.

برای حالت  $n \geq 1$ ، معادله (۶) بدون تغییر باقی می‌ماند و مسئله مقدار مرزی توصیف شده توسط معادلات (۶) و (۷)، از آنجایی که معادله حاکم بر آنها از نوع کوشی-اویلر است، می‌توانیم مجموعه جواب‌های آن را با استفاده از توابع  $n$ - $\Phi(r) = r^n$  و  $n$ - $\Phi(r) = r^{-n}$  تشکیل داد. در نتیجه جواب عمومی معادله (۶) برابر است با:

$$\phi_n(r) = c_1(r) r^n + c_2(r) r^{-n}$$

در نهایت  $\phi_n(r)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\phi_n(r) = \int_0^r \frac{1}{2n} \left[ \left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right] \times \quad (19)$$

$$f_n(\rho) \rho d\rho + D_1 r^n + D_2 r^{-n}$$

با اعمال شرایط مرزی معادله (۷) نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$D_2 = 0, \quad (20)$$

$$D_1 = \int_0^b \frac{1}{2n} \left[ \left(\frac{1}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{b^2}\right)^n \right] f_n(\rho) \rho d\rho$$

با جایگذاری بسط‌های (۴) و (۵) در معادله (۱) و برابر قرار دادن ضرایب متناظر سری در دو طرف، معادله دیفرانسیل معمولی خطی زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi_n(r)}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \phi_n(r) = -r f_n(r) \quad (6)$$

معادلات معادله (۲) بیانگر آن هستند که جواب  $\Phi_n(r)$  معادله (۶) باید تحت شرایط مرزی زیر قرار گیرد:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\phi_n(r)| < \infty \quad \text{and} \quad \phi_n(b) = 0 \quad (7)$$

شایان ذکر است که مجموعه جواب‌های معادله همگن متناظر با معادله (۶) برای حالت  $n=0$  با حالت  $n \geq 1$  متفاوت است. این بدان معناست که در حین ساخت تابع گرین برای مسئله مقدار مرزی توصیف شده توسط معادلات (۶) و (۷)، این دو حالت باید به صورت جداگانه در نظر گرفته شوند.

در حالتی که  $n=0$  باشد، مسئله مقدار مرزی شرح داده شده توسط معادلات (۶) و (۷) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi_0(r)}{dr} \right) = -r f_0(r) \quad (8)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\phi_0(r)| < \infty \quad \text{and} \quad \phi_0(b) = 0 \quad (9)$$

توابع  $\phi(r) = \ln r$  و  $\phi(r) = 1$  پاسخ‌های معادله همگن معادله (۸) را تشکیل می‌دهند؛ بنابراین، می‌توان جواب کلی معادله (۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\phi_0(r) = c_1(r) \ln r + c_2(r) \quad (10)$$

با جایگذاری این معادله در معادله (۸)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$c_1'(r) = -r f_0(r) \quad (11)$$

و

$$c_2'(r) = r \ln(r) f_0(r) \quad (12)$$

سپس با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:

$$c_1(r) = -\int_0^r \rho f_0(\rho) d\rho + D_1 \quad (13)$$

و

$$c_2(r) = \int_0^r \rho \ln(\rho) f_0(\rho) d\rho + D_2 \quad (14)$$

وقتی عبارات فوق در معادله (۱۰) جایگذاری شود و جملات انتگرال با هم ترکیب شوند جواب عمومی معادله (۸) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\phi(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^b \left( \frac{1}{\pi} \left[ \frac{g_0(r, \rho)}{2} + \right. \right. \quad (29)$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r, \rho) \cos n\theta \cos n\psi + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r, \rho) \sin n\theta \sin n\psi \right\} f(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi$$

که می‌توان آن را پس از ترکیب دو سری مثلثاتی به صورت فشرده زیر نوشت:

$$\phi(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^b \left( \frac{1}{\pi} \left[ \frac{g_0(r, \rho)}{2} + \right. \quad (30)$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r, \rho) \cos n(\theta - \psi) \right\} f(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi$$

مطابق معادله (۳۰)، تابع گرین مربوط به مسئله دیریکله برای معادله لاپلاس روی دایره‌ای به شعاع  $b$  به شکل زیر است:

$$G(r, \theta; \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} [g_0(r, \rho) + \quad (31)$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r, \rho) \cos n(\theta - \psi)]$$

در حالت  $r \leq \rho$  معادله (۳۱)، به فرم زیر ساده می‌شود:

$$G(r, \theta; \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\ln\left(\frac{\rho}{b}\right) + \quad (32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^n \right] \cos n(\theta - \psi) \right\}$$

با استفاده از معادله

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y^n}{n} \cos n\theta = \frac{-1}{2} \ln(1 - 2Y \cos \theta + Y^2)$$

برای حالت  $r \geq \rho$ ، معادله (۳۱) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$G(r, \theta; \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\ln\left(\frac{\rho}{b}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - 2\left(\frac{r}{\rho}\right) \cos(\theta - \psi) \right) \right. \quad (33)$$

$$\left. + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{2} \ln\left(1 - 2\left(\frac{r\rho}{b^2}\right) \cos(\theta - \psi) + \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^2\right) \right\}$$

برای حالت  $r \geq \rho$ ، معادله (۳۱) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$G(r, \theta; \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\ln\left(\frac{r}{b}\right) + \quad (34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^n \right] \cos n(\theta - \psi) \right\}$$

پس از ساده‌سازی تابع گرین به صورت زیر به دست می‌آید:

با جایگذاری این ضرایب در معادله (۶)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\phi_n(r) = \int_0^r \frac{1}{2n} \left[ \left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right] f_n(\rho) \rho d\rho \quad (21)$$

$$+ \int_0^b \frac{1}{2n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^n \right] f_n(\rho) \rho d\rho$$

می‌توان  $\phi_n(r)$  را به صورت فشرده‌تر به شکل زیر نوشت:

$$\phi_n(r) = \int_0^b g_n(r, \rho) f_n(\rho) \rho d\rho \quad (22)$$

که تابع  $g_n(r, \rho)$  در دو بخش به صورت زیر تعریف می‌گردد. برای حالت  $r \leq \rho$  به صورت زیر است:

$$g_n(r, \rho) = \frac{1}{2n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^n \right] \quad (23)$$

در حالی که برای  $r \geq \rho$  به صورت زیر می‌باشد:

$$g_n(r, \rho) = \frac{1}{2n} \left[ \left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^n \right] \quad (24)$$

اکنون به بررسی ضرایب  $\phi_{nc}(r)$  و  $\phi_{ns}(r)$  در بسط معادله (۴) پرداخته می‌شود. عبارت موجود در معادله (۲۲) نشان می‌دهد که ضرایب کسینوسی و سینوسی سری فوریه در معادله (۴) را می‌توان بر حسب توابع گرین  $g_n(r, \rho)$  و  $g_0(r, \rho)$  به صورت زیر نوشت:

$$\phi_{nc}(r) = \int_0^b g_n(r, \rho) f_{nc}(\rho) \rho d\rho \quad (25)$$

$$\phi_{ns}(r) = \int_0^b g_n(r, \rho) f_{ns}(\rho) \rho d\rho \quad (26)$$

بر طبق روابط فوریه نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$f_{nc}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \psi) \cos n\psi d\psi \quad (27)$$

$$f_{ns}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \psi) \sin n\psi d\psi \quad (28)$$

با جایگذاری  $f_{nc}(\rho)$  و  $f_{ns}(\rho)$  از روابط (۲۷) و (۲۸) در معادله (۱۷)، (۲۵) و (۲۶) و سپس ساده سازی جواب مسأله مقدار مرزی بیان شده توسط روابط (۱) و (۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\phi(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^b G(r, \theta; \rho, \psi) \times \frac{Q}{r} \delta(\rho - r_0) \delta(\psi - \theta_0) \rho d\rho d\psi \quad (37)$$

### نتایج و بحث

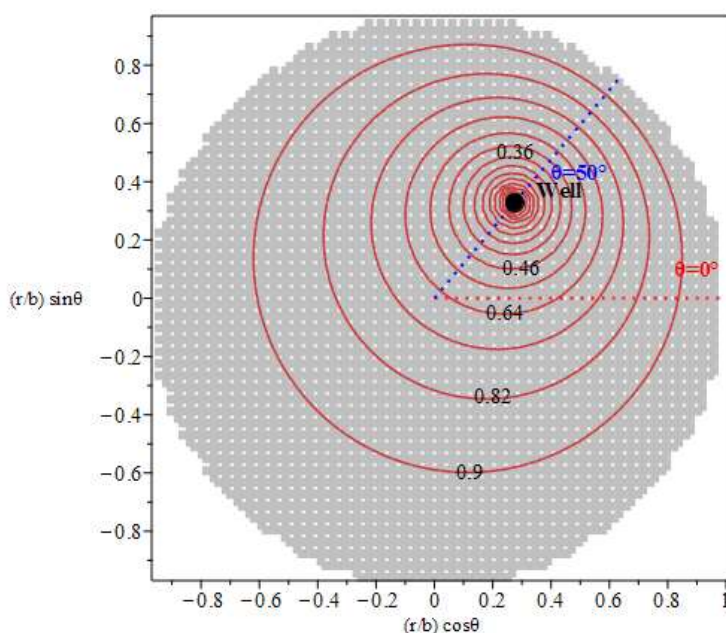
برای تبیین بهتر نتایج، یک مثال عددی در نظر گرفته می‌شود. در این مثال، با فرض پارامترهای  $\theta_0=50^\circ$ ،  $r_0=3m$ ،  $b=7m$ ،  $T=5m^2/d$  و  $Q=100m^3/d$ ،  $h_1=8m$  منحنی‌های همتراز مخروط افت و هد هیدرولیکی به ترتیب مطابق شکل‌های ۲ و ۳ ارائه شده‌اند. در شکل ۲، ناحیه خاکستری رنگ، سطح ایستابی اولیه (پیش از آغاز پمپاژ) را نشان می‌دهد که در آن افت تراز آب زیرزمینی برابر صفر است. همچنین، خطوط با زوایای صفر و پنجاه درجه و نیز محل قرارگیری چاه در این شکل مشخص شده‌اند.

$$G(r, \theta; \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - 2\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos(\theta - \psi) + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 - 2\left(\frac{r\rho}{b^2}\right) \cos(\theta - \psi) + \left(\frac{r\rho}{b^2}\right)^2\right) \right\} \quad (35)$$

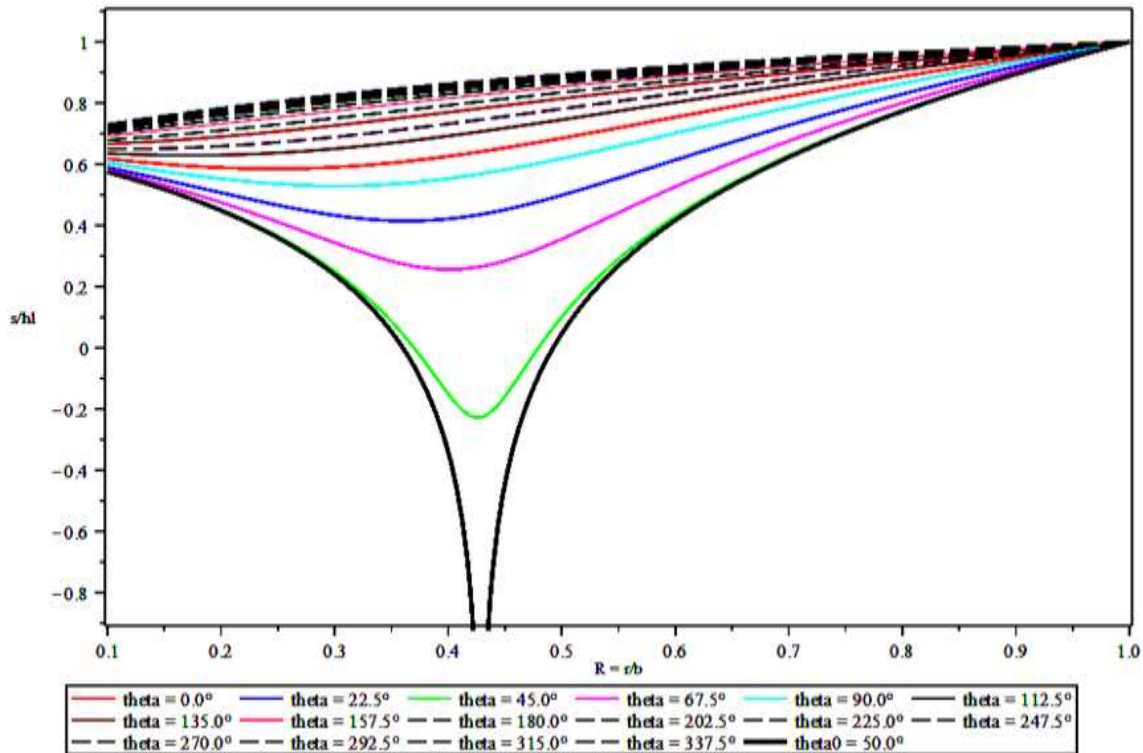
بنابراین، تابع  $h(r, \theta)$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$h(r, \theta) = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \int_0^b G(r, \theta; \rho, \psi) \times \frac{Q}{r} \delta(\rho - r_0) \delta(\psi - \theta_0) \rho d\rho d\psi \quad (36)$$

در نتیجه تابع توزیع پتانسیل آبخوان به صورت زیر تعیین می‌گردد:



شکل ۲- منحنی‌های همتراز بی بعد مخروط افت سطح آب (drawdown)



شکل ۳- پروفیل‌های افت سطح آب در امتدادهای مختلف

برای اعتبارسنجی راه‌حل تحلیلی ارائه شده، از یک مدل عددی مبتنی بر روش اجزای محدود (Finite Element Method) که در محیط نرم‌افزار MATLAB پیاده‌سازی شده است، استفاده گردید. هدف از این مدل‌سازی عددی، تأیید صحت حل بسته تحلیلی حاصل از معادله پواسون در آبخوان دایره‌ای با استفاده از پارامترهای فیزیکی و هندسی یکسان بود.

در این مدل، دامنه دایره‌ای آبخوان به شعاع  $b$  با استفاده از المان‌های مثلثی گسسته‌سازی شد. به دلیل شیب شدید هد هیدرولیکی در مجاورت چاه پمپاژ، در این ناحیه از مش‌بندی بسیار ریز استفاده شد تا دقت محاسبات حفظ گردد. معادله حاکم به فرم ضعیف تبدیل و با توابع شکل خطی روی هر المان مثلثی تقریب زده شد. شرط مرزی دیریکله (هد صفر) روی مرز خارجی ( $r=b$ ) به‌طور مستقیم به گره‌های مرزی اعمال شد. چشمه نقطه‌ای مربوط به چاه نیز در موقعیت  $(r_0, \theta_0)$  به‌عنوان یک ترم شار در فرمول‌بندی المان‌ها منظور گردید. پس از تشکیل سیستم معادلات از طریق ترکیب محاسبات تمامی المان‌ها، این سیستم در MATLAB حل شد تا توزیع هد هیدرولیکی در سراسر دامنه به‌دست آید.

برای ارزیابی کمی انطباق بین نتایج تحلیلی و عددی، افت سطح آب در دو امتداد  $67/5$  درجه و  $90$  درجه مقایسه شد (شکل ۵). شاخص‌های آماری ضریب تعیین ( $R^2$ ) و ریشه میانگین مربعات

شکل ۲، منحنی‌های همتراز بی بعد مخروط افت سطح آب (Cone of depression) در اطراف یک چاه پمپاژ در یک آبخوان دایره‌ای را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است مخروط افت در نزدیکی چاه بیشترین عمق را دارد و با دور شدن از چاه پمپاژ افت کاهش می‌یابد. نمودار شکل ۳ پروفیل‌های افت سطح آب در زوایای مختلف نسبت به موقعیت چاه را نمایش می‌دهد. هر منحنی مربوط به یک زاویه خاص (مانند  $0$ ،  $22.5$ ،  $45$ ، ... درجه) می‌باشد. افت سطح آب در راستای زاویه‌ای که چاه در آن قرار دارد ( $\theta=50$  درجه) بیشترین مقدار را دارد. با تغییر زاویه، افت کاهش می‌یابد که نشان‌دهنده تأثیر جهت‌گیری چاه بر توزیع افت است. این پروفیل‌ها به درک الگوی نامتقارن افت در آبخوان دایره‌ای کمک می‌کنند. شکل ۴، منحنی‌های همتراز هد هیدرولیکی بی بعد را در صفحه آبخوان نمایش می‌دهد. هر یک از منحنی‌های همتراز بیانگر نقاطی با هد هیدرولیکی یکسان است. منحنی‌های همتراز در اطراف چاه به شکل دایره‌های متحدالمرکز نیستند، زیرا چاه در مرکز آبخوان قرار ندارد. ناحیه سبز رنگ در شکل ۴، توزیع اولیه بی بعد هد هیدرولیکی سطح آب پیش از آغاز پمپاژ را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، هد هیدرولیکی در تمام این ناحیه مقداری ثابت و یکسان است.

یافته‌های این تحقیق از جنبه‌های مختلف با نتایج مطالعات پیشینیان در حوزه مدل‌سازی تحلیلی آبخوان‌ها قابل مقایسه است: مقایسه با هندسه‌های غیردایره‌ای: عمده راه‌حل‌های تحلیلی پیشین بر آبخوان‌هایی با هندسه مستطیلی (Mahdavi, 2015)، مثلثی (Asadi- Aghbolaghi and Seyyedian, 2010) یا نیمه‌بی‌نهایت متمرکز بوده‌اند. برای مثال، Asadi- Aghbolaghi et al. (2010) یک راه‌حل تحلیلی برای آبخوان مثلثی با استفاده از روش چاه‌های مجازی و بسط فوریه ارائه کردند که علیرغم در نظر گرفتن مرزهای واقعی و ناهمگونی، ذاتاً برای حوضه‌های مثلثی کاربرد دارد. راه حل حاضر با ارائه یک فرم بسته ریاضی برای حوضه دایره‌ای محدود، شکاف موجود در این زمینه را پر می‌کند. برخلاف روش‌های عددی که برای هندسه‌های مختلف قابل استفاده هستند ولی نیاز به گسسته‌سازی دارند، این راه حل دقت تحلیلی را برای یک هندسه خاص اما متداول در طبیعت (مانند آبخوان‌های کارستی یا محصورشده با گسل‌های حلقوی) فراهم می‌آورد.

مقایسه از نظر روش حل: روش به کار رفته در این تحقیق مبتنی بر ترکیب تابع گرین و بسط سری فوریه است. این رویکرد با تحقیق (Mahdavi et al. (2014 که از روش نیمه تحلیلی مبتنی بر حساب تغییرات برای آبخوان‌های دوزنقه‌ای استفاده کردند و نیز با مطالعه Intaraprasong and Zhan (2007) که از تبدیل لاپلاس برای مدل‌سازی ناحیه آبیگیری بین دو نهر بهره بردند، قابل مقایسه است. نقطه قوت راه‌حل حاضر، جمع شدن تحلیلی سری نامتناهی و تبدیل آن به فرمول جبری فشرده (روابط ۳۳ و ۳۵ در مقاله) است که محاسبات را بسیار ساده‌تر از روش‌هایی که نیاز به ارزیابی عددی چندین جمله از یک سری دارند، می‌کند.

همچنین نتایج این تحقیق در راستای کاربردهای عملی، مشابه با مطالعات پیشین است. همانطور که Asadi-Aghbolaghi et al. (2013) به بررسی نرخ‌های بحرانی پمپاژ برای تعیین منبع آب چاه (آبخوان یا رودخانه) پرداختند، راه‌حل حاضر نیز به طور مستقیم می‌تواند برای بهینه‌سازی مکان چاه و تعیین محدوده نفوذ در آبخوان‌های دایره‌ای شکل استفاده شود. همچنین، قابلیت محاسبه میدان سرعت جریان (با استفاده از رابطه ۳۷ و مشتق‌گیری از تابع پتانسیل) امکان ترسیم مسیرهای جریان و تحلیل آسیب‌پذیری آبخوان را فراهم می‌آورد که تکمیل کننده کار محققانی مانند Xie et al.

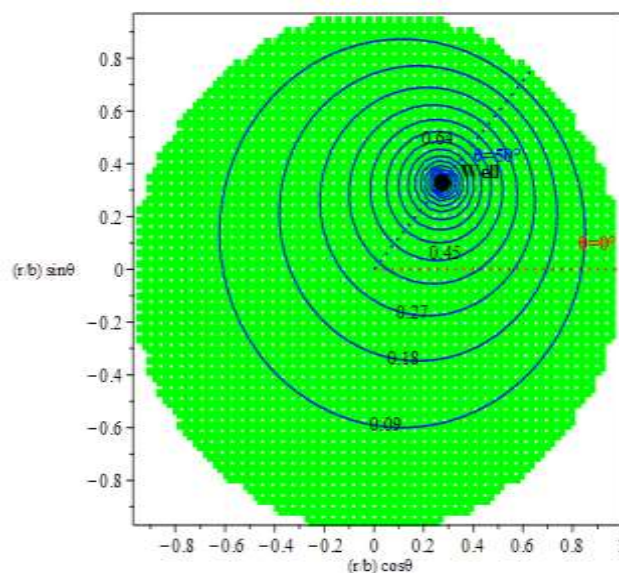
خطا (RMSE) محاسبه گردید (روابط ۳۸ و ۳۹) که مقادیر آنها به ترتیب ۰/۹۶ و ۰/۰۶ به دست آمد. این نتایج نشان‌دهنده همبستگی بسیار خوب و انطباق قابل توجه بین دو مجموعه داده است و در نهایت، صحت و قابلیت اطمینان راه‌حل تحلیلی ارائه شده را تأیید می‌کند.

$$R^2 = \frac{1 - SSE}{V(n-1)} \quad (38)$$

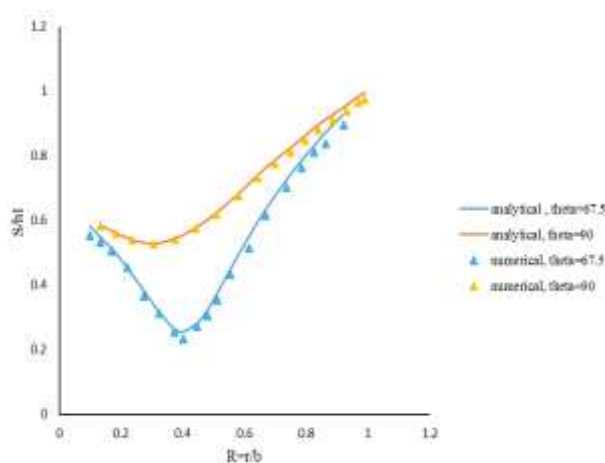
$$SSE = \sum_{i=1}^n (P_i - O_i)^2 \quad (39)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (P_i - O_i)^2}{n}}$$

در این روابط  $n$ : تعداد داده‌ها،  $v$ : واریانس داده‌های حاصل از حل تحلیلی و  $P_i$ : مقدار به دست آمده از حل تحلیلی،  $O_i$ : مقدار به دست آمده از شبیه‌سازی عددی است.



شکل ۴- منحنی‌های هم‌تراز هد هیدرولیکی بدون بعد



شکل ۵- مقایسه حل تحلیلی با حل عددی

### تضاد منافع نویسندگان

در این مقاله هیچ‌گونه تضاد منافی وجود ندارد و این مسئله مورد تایید همه نویسندگان است.

### مشارکت نویسندگان

نحوه و میزان مشارکت نویسندگان در انجام این پژوهش به صورت زیر است:

نویسنده اول: ارائه حل تحلیلی معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی، کد نویسی در نرم‌افزار میپل برای ترسیم نتایج و نمودارها و نگارش مقاله

نویسنده دوم: تحلیل خروجی‌ها، ویرایش مقاله و کنترل نتایج

### اصول اخلاقی

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این اثر عملی رعایت نموده‌اند و این موضوع مورد تایید همه آنها می‌باشد.

### منابع

1. Mahdavi, A., 2015. Transient-state analytical solution for groundwater recharge in anisotropic sloping aquifer. *Water Resources Management*, 29(10), pp.3735-3748. <https://doi.org/10.1007/s11269-015-1026-7>.
2. Huang, C.S., Lin, W.S. and Yeh, H.D., 2014. Stream filtration induced by pumping in a confined, unconfined or leaky aquifer bounded by two parallel streams or by a stream and an impervious stratum. *Journal of Hydrology*, 513, pp.28-44. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2014.03.039>.
3. Xie, Y., Cook, P.G. and Simmons, C.T., 2016. Solute transport processes in flow-event-driven stream-aquifer interaction. *Journal of Hydrology*, 538, pp.363-373. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2016.04.031>.
4. Barlow, P.M., DeSimone, L.A. and Moench, A.F., 2000. Aquifer response to stream-stage and recharge variations. II. Convolution method and applications. *Journal of Hydrology*, 230(3-4), pp.211-229. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(00\)00176-1](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(00)00176-1).
5. Upadhyaya, A. and Chauhan, H.S., 2001. Interaction of stream and sloping aquifer receiving constant recharge. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 127(5), pp.295-301. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(2001\)127:5\(295\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(2001)127:5(295)).
6. Asadi-Aghbolaghi, M. and Seyyedean, H., 2010. An analytical solution for groundwater flow to a vertical well in a triangle-shaped aquifer. *Journal of*

(2016) در زمینه بررسی انتقال آلاینده در برهم‌کنش رودخانه-آبخوان است.

چارچوب روش ارائه شده، مشابه آنچه Kuang and Yeh (2011) برای ارائه یک راه‌حل تعمیم یافته در آبخوان‌های نشستی تحت اثر جزر و مد انجام دادند، قابلیت توسعه برای شرایط پیچیده‌تر را دارد. این روش می‌تواند اساس کار برای توسعه راه‌حل‌های تحلیلی آبخوان‌های دایره‌ای با ویژگی‌های ناهمگن، ناهمسان یا تحت شرایط مرزی غیردیریکله (مانند شار ثابت یا مرز ترکیبی) قرار گیرد.

### نتیجه‌گیری

در این تحقیق، یک راه حل ریاضی دقیق و کامل برای محاسبه افت سطح آب و پتانسیل جریان در یک آبخوان دایره‌ای تحت اثر پمپاژ ارائه شد. با استفاده از تابع گرین و سری فوریه، معادله‌ی حاکم بر جریان حل و به یک فرمول نهایی بسته یا closed form (روابط ۳۳ و ۳۵) تبدیل گردید. این فرمول مستقیماً برای محاسبه‌ی میدان جریان (معادله ۳۷) به کار می‌رود و برای هر محل چاه درون آبخوان قابل استفاده است.

بررسی نتایج نشان داد:

- مخروط افت در نزدیکی چاه عمیق‌ترین و با فاصله گرفتن از آن، کم‌عمق‌تر می‌شود.
- به دلیل قرار نداشتن چاه در مرکز دایره، خطوط هم‌سطح آب (کانتورها) شکل متقارنی ندارند.
- مقایسه‌ی این راه حل با نتایج روش عددی اجزای محدود تطابق عالی آن‌ها را تایید می‌کند که نشان‌دهنده‌ی دقت بالای روش ارائه شده است.

این راه حل تحلیلی می‌تواند در راستای تخمین سریع محدوده‌ی تأثیر چاه پمپاژ و تشخیص بهترین مکان حفر چاه در آبخوان‌های دایره‌ای شکل (مانند برخی آبخوان‌های کارستی) ابزاری مفید برای مهندسان باشد. همچنین، این روش قابلیت گسترش برای شرایط پیچیده‌تر را نیز دارد.

### تقدیر و تشکر

از سازمان تحقیقات، آموزش و ترویج کشاورزی شهرکرد به پاس حمایت‌های ارزنده از این تحقیق که نتایج آن در اجرای طرح بررسی پتانسیل فرونشست زمین در دشت شهرکرد با استفاده از روش‌های تداخل‌سنجی تفاضلی راداری و مدل‌سازی آب زیرزمینی مورد استفاده قرار می‌گیرد صمیمانه قدردانی می‌گردد.

- Hydrology*, 393(3-4), pp.341-348.  
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2010.08.034>.
7. Intaraprasong, T. and Zhan, H., 2007. Capture zone between two streams. *Journal of Hydrology*, 338(3-4), pp.297-307.  
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2007.03.005>.
  8. Kacimov, A.R., Kayumov, I.R. and Al-Maktoumi, A., 2016. Rainfall induced groundwater mound in wedge-shaped promontories: The Strack–Chernyshov model revisited. *Advances in Water Resources*, 97, pp.110-119.  
<https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2016.08.011>.
  9. Mahdavi, A. and Seyyedian, H., 2014. Steady-state groundwater recharge in trapezoidal-shaped aquifers: A semi-analytical approach based on variational calculus. *Journal of Hydrology*, 512, pp.457-462.  
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2014.03.016>.
  10. Asadi-Aghbolaghi, M., Rakhshandehroo, G.R. and Kompani-Zare, M., 2013. An analytical approach to capture zone delineation for a well near a stream with a leaky layer. *Hydrological sciences journal*, 58(8), pp.1813-1823.  
<https://doi.org/10.1080/02626667.2013.840725>.
  11. Chuang, M.H. and Yeh, H.D., 2011. A generalized solution for groundwater head fluctuation in a tidal leaky aquifer system. *Journal of earth system science*, 120(6), pp.1055-1066.  
<https://doi.org/10.1007/s12040-011-0128-8>
  12. Xia, Y., Li, H., Boufadel, M.C., Guo, Q. and Li, G., 2007. Tidal wave propagation in a coastal aquifer: Effects of leakages through its submarine outlet-capping and offshore roof. *Journal of Hydrology*, 337(3-4), pp.249-257.  
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2007.01.036>.
  13. Mahdavi, A., 2019. Response of triangular-shaped leaky aquifers to rainfall-induced groundwater recharge: an analytical study. *Water Resources Management*, 33(6), pp.2153-2173.  
<https://doi.org/10.1007/s11269-019-02234-7>.
  14. Moheghian, D., and Asadi Aghbolaghi, M. (2015). Analytical solution of tidal groundwater fluctuations in a heterogeneous aquifer system influenced by two tidal waves. *Iran Water Resources Research*, 9(4), 149-158. [In Persian].
  15. Shah Hosseini, M., Mohdizadeh Tabatabaei, M., and Mousavi Nadoushani, S. S. (2018). Analytical study of stable geometry of meandering rivers. *Iran Water Resources Research*, 12(3), 61-69. [In Persian].
  16. Kuang, X., & Yeh, H. D. (2011). A generalized analytical solution for tidal fluctuations in a leaky confined aquifer. *Advances in Water Resources*, 34(6), 720–729.

