

Application of copula functions in groundwater studies (A review)

R. Mirabbasi Najafabadi^{1*} and M. Nazeri Tahroudi²

Extended Abstract

Introduction:

Groundwater is a vital resource for human livelihoods and agricultural productivity, especially in arid and semi-arid regions. Therefore, the quantitative and qualitative management of these resources is of great importance. Traditional methods of analyzing groundwater levels often overlook the complex interdependencies among various influencing factors, such as precipitation, temperature, and land use. Over the past two decades, copula functions have emerged as a powerful statistical tool for modeling such dependencies, enabling the joint distribution of multiple variables affecting a given phenomenon. This paper reviews existing research on the application of copula functions in groundwater-related studies and attempts to highlight gaps in the current literature while suggesting potential directions for future research.

Methods:

Copula functions are mathematical tools that link univariate distribution functions to form a multivariate distribution. A copula can describe the dependence structure between two or more random variables and has gained significant attention over the past two decades as a practical and efficient method for modeling the overall dependence structure of variables in multidimensional phenomena. Three main approaches are used to construct copula functions in three or more dimensions: (1) symmetric multidimensional copulas, which are limited by mathematical constraints and symmetric dependence requirements; (2) nested (hierarchical) copulas, where bivariate copulas sequentially link pairs of variables or their joint distributions in a stepwise manner until reaching the desired dimensionality, and (3) vine copulas, which offer greater flexibility through structured pair-copula constructions.

Results:

In this study, methods based on copula functions in groundwater studies were investigated from different aspects. The results showed that one of the biggest challenges in this field is the selection of a suitable copula function that can accurately describe the dependencies between the variables. An incorrect choice of copula function can lead to poor modeling results. Also, the complexity of the calculations and the need for data with adequate accuracy and length are further limitations when using copula functions in groundwater studies, as access to groundwater monitoring data is limited in many areas. However, copula functions offer significant advantages in modeling groundwater systems. These functions provide the necessary flexibility to model nonlinear dependencies between variables, and allow the separation of marginal distributions from the dependency structure. These features help to improve the risk assessment and management of groundwater resources. To realize the full potential of copula functions in hydrological research, it is necessary to conduct more case studies in different environments. Priority should also be given to studying the long-term effects of climate change and the more complex interactions between socio-economic and environmental variables. Finally, integrating copula functions with innovative modeling approaches can help improve modeling accuracy, and ultimately lead to a better understanding and management of groundwater resources. The results of a review of published studies in various fields (including joint frequency analysis of quantitative and qualitative variables, joint simulation, spatial analysis, effects of other variables on groundwater quantity and quality, groundwater drought, etc.) indicate the favorable performance of copula functions in groundwater studies. This effectiveness is primarily attributed to their distribution-oriented nature of this method. Despite recent advances in the use of copula functions in hydrology, their application to complex groundwater systems,

1- Associate Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

2- Assistant Professor, Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture, Lorestan University, Khorramabad, Iran.

* Corresponding Author: mirabbasi_r@yahoo.com

Received: 2025/02/25

Accepted: 2025/06/02

involving spatially distributed variables and structural heterogeneities, has yet remained underexplored. The development of basic copula methods to account for non-stationarity in groundwater data could also be an area for future study. In addition, the integration of copula functions with more advanced modeling methods, such as Bayesian hierarchical models, could open up new opportunities for future research. This integration could help to improve the modeling of complex dependencies between hydrological variables, especially in groundwater systems.

Conclusion:

A review of current literature on climate change impacts reveals that most studies focus on specific geographic regions, limiting the generalizability of their findings. There is a need for more extensive case studies across diverse environments to validate the effectiveness of copula functions in various hydrogeological contexts. While some research has begun using copulas to assess climate change effects on groundwater levels, comprehensive studies examining long-term trends and their implications for water resource management remain scarce. Although copulas can effectively capture dependencies among multiple variables, existing studies often concentrate on a limited set of factors. More complex interactions—such as those involving socio-economic variables, land-use changes, and policy impacts—require further exploration. Additionally, most studies assume stationarity in time series data, leaving room for future research to incorporate non-stationarity in both marginal distributions and copula functions.

Keywords: Bivariate copulas, Dependency analysis, Groundwater, Multivariate analysis, Vine copulas

Citation: Mirabbasi Najafabadi, R. and Nazeri Tahroudi, M., 2025. Application of copula functions in groundwater studies (A review). *Iranian Water Research Journal*. 57 (2). pp. 49-66.
<https://dx.doi.org/10.22034/iwrj.2025.15130.2670>



مروری بر کاربرد توابع مفصل در مطالعات آب‌های زیرزمینی

رسول میرعباسی نجف‌آبادی^{۱*} و محمد ناظری تهرودی^۲

چکیده

در این مطالعه، روش‌های مبتنی بر توابع مفصل در مطالعات آب زیرزمینی از جنبه‌های مختلف بررسی شده است. نتایج نشان داد که یکی از چالش‌های اصلی در این حوزه، انتخاب تابع مفصل مناسب است که بتواند وابستگی‌های بین متغیرها را به دقت توصیف کند. انتخاب نادرست تابع مفصل می‌تواند به نتایج ضعیف در مدل‌سازی منجر شود. همچنین، پیچیدگی محاسباتی و نیاز به داده‌های با دقت و طول مناسب از دیگر محدودیت‌های استفاده از توابع مفصل در مطالعات آب‌های زیرزمینی محسوب می‌شوند، زیرا در بسیاری از مناطق دسترسی به داده‌های مشاهداتی آب زیرزمینی محدود است. با این حال، توابع مفصل مزایای قابل توجهی در مدل‌سازی سیستم‌های آب زیرزمینی ارائه می‌دهند. این توابع انعطاف‌پذیری لازم برای مدل‌سازی وابستگی‌های غیرخطی بین متغیرها را فراهم می‌کنند و جداسازی توزیع‌های حاشیه‌ای از ساختار وابستگی را امکان‌پذیر می‌کنند. مهم‌ترین توابع در بحث تحلیل فراوانی توأم و همچنین شبیه‌سازی‌های شرطی و توأم پارامترهای آب زیرزمینی مفصل‌های دومتغیره ارشمیدسی و مفصل‌های واین می‌باشند که ابعاد بالاتر را در بر می‌گیرد. این ویژگی‌ها به بهبود ارزیابی ریسک و مدیریت منابع آب زیرزمینی کمک می‌کنند. برای تحقق پتانسیل کامل توابع مفصل در تحقیقات هیدرولوژیک، انجام مطالعات موردی گسترده‌تر در محیط‌های مختلف ضروری است. همچنین، بررسی تأثیرات بلندمدت تغییرات اقلیمی و تعاملات پیچیده‌تر بین متغیرهای اجتماعی-اقتصادی و محیطی باید در اولویت قرار گیرد. در نهایت، ادغام توابع مفصل با رویکردهای مدل‌سازی نوآورانه می‌تواند به بهبود دقت مدل‌سازی و در نهایت شناخت و مدیریت بهتر منابع آب زیرزمینی کمک کند. نتایج بررسی مطالعات منتشر شده در زمینه‌های مختلف، اعم از تحلیل فراوانی توأم متغیرهای کمی و کیفی، شبیه‌سازی توأم، تحلیل مکانی، تأثیرات متغیرهای دیگر بر کمیت و کیفیت آب زیرزمینی، خشکسالی آب زیرزمینی و غیره نشان از عملکرد مطلوب توابع مفصل در مطالعات آب زیرزمینی دارد که در بیشتر موارد آن را به توزیع‌محور بودن این روش نسبت داده‌اند. با وجود پیشرفت‌های اخیر در استفاده از توابع مفصل در هیدرولوژی، کاربرد این توابع در سیستم‌های پیچیده آب زیرزمینی که شامل متغیرهای توزیع‌شده مکانی و ناهمگنی‌های ساختاری هستند، هنوز به‌طور کامل بررسی نشده است. همچنین توسعه روش‌های مفصل‌پایه برای لحاظ کردن نایستایی در داده‌های آب زیرزمینی می‌تواند از زمینه‌های مورد مطالعه در آینده باشد. علاوه بر این، ادغام توابع مفصل با روش‌های مدل‌سازی پیشرفته‌تر، مانند مدل‌های سلسله‌مراتبی بیزی، می‌تواند فرصت‌های جدیدی برای تحقیقات آینده ایجاد کند. این ادغام می‌تواند به بهبود مدل‌سازی وابستگی‌های پیچیده بین متغیرهای هیدرولوژیکی، به‌ویژه در سیستم‌های آب زیرزمینی کمک کند.

واژه‌های کلیدی: آب‌های زیرزمینی، تحلیل چندمتغیره، تحلیل وابستگی، مفصل‌های دومتغیره، مفصل‌های واین.

ارجاع: میرعباسی نجف‌آبادی، ر. و ناظری تهرودی، م.، ۱۴۰۴. مروری بر کاربرد توابع مفصل در مطالعات آب‌های زیرزمینی. مجله پژوهش آب ایران. ۵۷ (۲). صص ۴۹-۶۶. <https://dx.doi.org/10.22034/iwrj.2025.15130.2670>

۱- دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران.

۲- استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران.

* نویسنده مسئول: mirabbasi@sku.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۱۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۰۷

مقدمه

آب‌های زیرزمینی یک منبع حیاتی برای بقای انسان و بهره‌وری کشاورزی بویژه در مناطق خشک و نیمه خشک هستند؛ بنابراین مدیریت کمی و کیفی این منابع از اهمیت زیادی برخوردار است. روش‌های سنتی تجزیه و تحلیل سطح آب‌های زیرزمینی اغلب وابستگی‌های متقابل پیچیده میان عوامل مختلف تأثیرگذار مانند بارش، دما و کاربری اراضی را نادیده می‌گیرند. در دو دهه اخیر، توابع مفصل^۱ به عنوان یک ابزار آماری قدرتمند، برای مدل‌سازی این‌گونه وابستگی‌ها مورد توجه قرار گرفته‌اند و امکان ایجاد توزیع توأم متغیرهای متعدد تأثیرگذار بر یک پدیده را فراهم می‌کند. این مقاله به مرور تحقیقات موجود در مورد کاربرد توابع مفصل در مطالعات مرتبط با آب‌های زیرزمینی می‌پردازد و سعی خواهد شد با بررسی دامنه تحقیقات موجود، شکاف‌ها را برجسته و زمینه‌هایی برای تحقیقات آینده پیشنهاد شود.

کاربرد توابع مفصل در هیدرولوژی، به‌ویژه در مطالعات آب‌های زیرزمینی، به دلیل توانایی آن‌ها در مدل‌سازی وابستگی بین متغیرهای متعدد به‌طور مؤثر، مورد توجه قرار گرفته است. توابع مفصل به محققان این امکان را می‌دهد تا روابط بین عوامل هیدرولوژیک مختلف که برای مدل‌سازی دقیق آب‌های زیرزمینی و مدیریت این منابع ضروری است را درک و کمی کنند.

پیچیدگی روزافزون سیستم‌های هیدرولوژیکی، استفاده از روش‌های آماری پیشرفته را برای درک بهتر رولبط و وابستگی‌های بین متغیرهای مختلف هیدرولوژیکی ضروری کرده است. یکی از این روش‌ها استفاده از توابع مفصل است که امکان ایجاد توزیع‌های چندمتغیره با در نظر گرفتن ساختار وابستگی بین متغیرهای تصادفی و در عین حال حفظ توزیع‌های حاشیه‌ای آنها را فراهم می‌کند. توابع مفصل ابزارهای آماری قدرتمندی هستند که برای مدل‌سازی و تحلیل ساختار وابستگی بین متغیرهای متعدد استفاده می‌شوند. مفصل، تابعی است که توابع توزیع چندمتغیره را به توزیع‌های حاشیه‌ای تک‌بعدی آن‌ها پیوند می‌دهد. در واقع توابع مفصل، یک رویکرد انعطاف‌پذیر در مدل‌سازی ساختارهای وابستگی، بدون فرض توزیع‌های حاشیه‌ای خاص می‌باشند (Nelsen, 2006; Tahroudi et al., 2024). این توابع به‌ویژه در هیدرولوژی و منابع آب برای درک روابط پیچیده‌ای که با روش‌های سنتی قابل درک نیستند، مفید

هستند. در مطالعات آب‌های زیرزمینی، از توابع مفصل برای تجزیه و تحلیل و مدل‌سازی پدیده‌های مختلف از جمله نوسانات سطح آب‌های زیرزمینی، گسترش آلودگی و بررسی تبادل بین آب‌های زیرزمینی و آب‌های سطحی استفاده شده است.

در این مقاله، مروری بر کاربرد توابع مفصل در مطالعات هیدرولوژیکی، بویژه آب‌های زیرزمینی انجام شده است. بدین منظور، ابتدا مختصری راجع به تئوری توابع مفصل ارائه خواهد شد و در ادامه به کاربردهای این توابع در تحلیل چندمتغیره در حوزه آب‌های زیرزمینی پرداخته می‌شود.

تئوری مفصل

توابع مفصل معرفی شده توسط اسکالر (Sklar, 1959)، تابعی هستند که با پیوند دادن توابع توزیع تک‌متغیره، یک توزیع چندمتغیره ایجاد می‌کنند (Nelsen, 2006). تابع مفصل قادر است ساختار وابستگی بین دو یا چند متغیر تصادفی را توصیف کند و در دو دهه اخیر، به عنوان یک روش عملی و کارآمد برای مدل‌سازی ساختار وابستگی کلی متغیرهای یک پدیده چندبعدی مورد توجه قرار گرفته است (Joe, 1997; Nelsen, 2006). مزایای استفاده از مفصل نسبت به توزیع‌های آماری چندمتغیره کلاسیک، عبارت است از: (۱) انعطاف‌پذیری در انتخاب توابع توزیع حاشیه‌ای دلخواه و ساختار وابستگی آن‌ها، (۲) تعمیم به بیش از دو متغیر و (۳) تجزیه و تحلیل جداگانه توزیع‌های حاشیه‌ای و ساختار وابستگی آن‌ها (Serinaldi et al., 2009; Salvadori et al., 2007).

برای ارائه یک تعریف دقیق از مفصل‌ها، فرض می‌شود متغیرهای تصادفی $x_1, \dots, x_n$ به ترتیب از توابع توزیع حاشیه‌ای دلخواه $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ پیروی کنند، در این حالت یک تابع مفصل C وجود دارد که این توابع توزیع حاشیه‌ای را برای ایجاد تابع توزیع توأم $F(x_1, \dots, x_n)$ به صورت زیر ترکیب می‌کند:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C\{F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\} \quad (1)$$

$$= C(u_1, \dots, u_n), \quad x_1, \dots, x_n \in R$$

اگر توزیع‌های حاشیه‌ای $F_i(x_i)$ پیوسته باشند، تابع مفصل C منحصربه‌فرد است. برعکس، اگر C یک تابع مفصل n بعدی باشد، F یک تابع توزیع n بعدی و $F_i(x_i), \dots, F_n(x_n)$ توزیع‌های حاشیه‌ای مربوطه می‌باشند.

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^n \log \{ c_{\theta}(F_{1n}(X_{1k}), \dots, F_{pn}(X_{pk})) \} c_{\theta}(u_1, \dots, u_n) \\ = \frac{\partial^n C_{\theta}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \quad (۷)$$

با مشتق گرفتن از معادله (۶) در مورد h و معادل صفر قرار دادن آن، معادله (۸) حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n l_{\theta} \{ \theta, F_{1n}(X_{1k}), \dots, F_{pn}(X_{pk}) \} = 0 \quad (۸)$$

که در آن، L نشان دهنده تابع لگاریتم درست‌نمایی و l_{θ} مشتق L نسبت به پارامتر θ می‌باشد (Zhang and Singh, 2007b). سپس تخمین گر پارامتر θ با حل معادله (۸) برآورد می‌شود.

روش IFM شامل دو مرحله است: (۱) توزیع‌های حاشیه‌ای از مقادیر مشاهده شده محاسبه می‌شود و (۲) پارامتر وابستگی مفصل، θ ، از طریق بیشینه کردن تابع احتمال لگاریتم درست‌نمایی برآورد می‌شود (Joe, 1997). لگاریتم درست‌نمایی به صورت زیر است:

$$l_{\theta} = \sum_{k=1}^n \ln c(F_1(x_1^i; \theta_1), \dots, F_p(x_p^i; \theta_p); \alpha) \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_j^i; \theta_j) \quad (۹)$$

ابتدا n تخمین جداگانه برای هر توزیع حاشیه‌ای تک‌متغیره بدست می‌آید، به عنوان مثال:

$$\bar{\theta}_j = \arg \max \sum_{i=1}^n f_j(x_j^i; \theta_j) \quad (۱۰)$$

برای $i = 1, \dots, n$ و سپس مقدار α با توابع حاشیه‌ای پیشین تخمین زده می‌شود:

$$\bar{\alpha} = \arg \max \sum_{i=1}^n \ln c(F_1(x_1^i; \theta_1), \dots, F_p(x_p^i; \theta_p); \alpha) \quad (۱۱)$$

مفصل‌های خانواده واین

برای ایجاد توابع توزیع با ابعاد سه و بیشتر، سه روش استفاده می‌شود. روش اول استفاده از توابع مفصل چندبعدی (سه بعد و بیشتر) متقارن است که به دلیل محدودیت‌های ریاضیاتی و الزاماتی که بر ساختار وابستگی دارند، کمتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند. روش دوم موسوم به مفصل‌های تودرتو (Nested) می‌باشد که توسط Serinaldi and Grimaldi (2007)

فرض کنید $C(u, v)$ یک تابع مفصل دوبعدی باشد که u و v توابع توزیع حاشیه‌ای هستند، در این صورت، تابع مفصل دوبعدی C خصوصیات زیر را دارد (Nelsen, 2006):

برای هر مقدار u و v :

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0 \quad (۲)$$

$$C(u, 1) = u \quad (۳)$$

$$C(1, v) = v \quad (۴)$$

برای هر جفت u_1 و u_2 و v_1 و v_2 اگر $u_1 \leq u_2$ و $v_1 \leq v_2$ باشد، آنگاه:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (۵)$$

مفصل‌ها به خانواده‌های مختلفی تقسیم می‌شوند که پرکاربردترین آنها شامل موارد زیر است:

(۱) مفصل‌های بیضوی نامتقارن^۱ (نرمال و t)، (۲) ارشمیدسی^۲ (کلاپتون^۳، گامبل^۴، فرانک^۵ و علی-میخائیل-حق^۶)، (۳) مفصل‌های مقادیر حدی^۷ (گامبل، هاسلر-رسیس^۸، گلامبوس^۹، تاوون^{۱۰} و t -EV) و (۴) خانواده‌های دیگر (پلاکت^{۱۱} و فارلی-گامبل-مورگنشترن^{۱۲}). در میان خانواده‌های مختلف، مفصل‌های ارشمیدسی و بیضوی نامتقارن در کاربردهای هیدرولوژیکی محبوبیت بیشتری دارند (Nelsen, 2006).

پارامترهای مفصل متقارن ارشمیدسی با روش گشتاورها با استفاده از ضریب همبستگی کندال (Kruskal, 1958) و برای مفصل‌های نامتقارن ارشمیدسی، با روش توابع استنباطی برای حاشیه‌ها^{۱۳} (IFM) یا روش حداکثر شبه درست‌نمایی^{۱۴} (MPL) برآورد می‌شوند.

روش حداکثر شبه درست‌نمایی یک رویکرد نیمه پارامتری است، در حالی که مقادیر تقریبی مشاهداتی همیشه بین ۰ و ۱ ($[0, 1]^n$) قرار دارند (Bezak et al., 2014). روش لگاریتم حداکثر درست‌نمایی به صورت زیر می‌باشد:

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^n \log \{ c_{\theta}(F_{1n}(X_{1k}), \dots, F_{pn}(X_{pk})) \} \quad (۶)$$

که در آن، F_{1n} برای عملکرد توزیع تجربی متغیر i است؛ c_{θ} چگالی مفصل است که می‌تواند به عنوان مشتق جزئی توابع مفید محاسبه شود:

8 - Husler-Reiss

9 - Galambos

10 - Tawn

11 - Plackett

12 - Farlie-Gumbel-Morgenstern

13 - Inference functions for margins

14 - Maximum pseudo-likelihood

1 - Asymmetrical elliptical copula

2 - Archimedean

3 - Clayton

4 - Gumbel

5 - Frank

6 - Ali-Mikhail-Haq

7 - Extreme Values

سطح دوم درخت، جفت‌های $(1,2)$ ، $(1,3|2)$ ، $(2,6|3)$ ، $(3,7|6)$ ، $(3,5|2)$ ، $(2,4|3)$ و غیره وجود دارند. انتخاب مفصل در سطح پایین، تأثیر زیادی در مفصل‌های شرطی در سطوح بالاتر دارد. بنابراین، انتخاب خانواده‌های مفصل بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند. مفصل‌های $C-Vine$ و $D-Vine$ موارد خاصی از $R-Vine$ با لبه خاص می‌باشند (شکل ۲). تعریف رایج برای ساختار هر دو مفصل $C-Vine$ و $D-vine$ در حالت سه‌بعدی به شرح زیر است:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3). \\ c_{12}\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}c_{23}\{F_2(x_2), F_3(x_3)\}. \quad (12) \\ c_{13|2}\{F_1(x_1|x_2), F_3(x_3|x_2)\}$$

شش روش مجاز برای تغییر x_1 ، x_2 و x_3 ، در معادله ۱۲ وجود دارد، اما تنها سه مورد تجزیه مختلفی دارند. علاوه بر این، هر یک از سه تجزیه هر دو مفصل $C-Vine$ و $D-Vine$ را شامل می‌شود.

یک مفصل چهارم‌تغیره $C-Vine$ نیز به صورت معادله ۱۳ می‌باشد. در مجموع، ۱۲ ساختار مختلف مفصل $D-Vine$ و ۱۲ ساختار مختلف مفصل $C-Vine$ وجود دارد و هیچکدام از ساختارهای مفصل $D-Vine$ با ساختار مفصل $C-Vine$ مشابه نمی‌باشد. هیچ‌گونه ساختار ممکن دیگر در مورد مفصل‌های منظم وجود ندارد. از این رو، در مورد چهاربعدی، ۲۴ ساختار مختلف ممکن جفت مفصل، ۱۲ مفصل $D-Vine$ و ۱۲ مفصل $C-Vine$ وجود دارد.

با تعمیم این ایده به n گره، می‌توان مشاهده کرد که n انتخاب برای مجموعه شرطی $\{i_2\}$ در T_2 ، $n-1$ انتخاب برای مجموعه شرطی $\{i_2, i_3\}$ در T_3 یک بار i_2 در T_2 انتخاب می‌شود. سرانجام، سه انتخاب برای مجموعه شرطی $\{i_2, i_3, i_4\}$ وجود دارد که قبلاً انتخاب شده‌اند. بنابراین، در مجموع $3=n!/2 \dots (n-1)$ نوع مفصل $C-Vine$ مختلف در n گره‌های n وجود دارد. برای مفصل n بعدی $D-Vine$ ، $n!$ روش ممکن انتخاب متغیرها در درخت T_1 وجود دارد. از آنجا که لبه‌های غیرمستقیم وجود دارند، یعنی برای همه جفت‌های i, j ؛ $c_{ij|D}=c_{ji|D}$ و مجموعه‌های اختیاری شرطی برای مفصل‌های $D-Vine$ ، می‌توان ترتیب در درخت T_1 برای یک مفصل $D-Vine$ را بدون تغییر واین مربوطه معکوس کرد. بنابراین، در مرحله اول فقط $n!/2$ درخت مختلف وجود دارد. همانند درخت T_1 ، درختان $T_2, \dots, T_{n-1}$ کاملاً مشخص است. این بدان معنی است که تعداد مفصل‌های $D-Vine$ مشخص در n گره برابر با $n!/2$ است (Aas et al., 2009).

توسعه داده شده است. در این روش، ابتدا توابع حاشیه‌ای دو متغیر با یک مفصل دوبعدی به هم متصل شده و حاصل آن که یک توزیع دومتغیره است، با تابع مفصل دوبعدی دیگری، به متغیر سوم متصل می‌گردد. این پروسه تا رسیدن به ابعاد موردنظر می‌تواند ادامه داشته باشد (Amini et al., 2022). روش دیگر برای ایجاد توزیع‌های چندمتغیره برای ابعاد سه و بالاتر، استفاده از مفصل‌های واین (Vine) است که توسط Joe (1997) معرفی شده و در چند سال اخیر مورد توجه محققان قرار گرفته است. در مفصل‌های چندبعدی متقارن لازم است که همه سری‌ها وابستگی یکسانی داشته باشند. به‌عنوان مثال، یک مفصل ۴ بعدی به معنای وابستگی بین هر دو سری جفت مفصل است که در واقعیت به ندرت اتفاق می‌افتد. هنگامی که ابعاد به ۵ و بیشتر می‌رسد، دقت این دسته از مفصل‌ها به میزان قابل‌توجهی کاهش می‌یابد. برعکس، مفصل‌های واین، انواع مختلف وابستگی را در جفت‌های مختلف امکانپذیر می‌کنند و همچنین به راحتی با ابعاد بالاتر، به‌عنوان مثال تا ۱۰ بعد را مدل می‌کنند (Aas et al., 2009).

یک مفصل واین d بعدی توسط $d(d-1)$ مفصل دوتایی به شکل درختی ساخته می‌شود. نقطه شروع برای ساخت توزیع چندمتغیره، شناخت کامل تابع چگالی چندمتغیره آن و تبدیل آن به چندین چگالی شرطی است. روش‌های مختلفی برای ساخت درخت مفصل وجود دارد. مفصل‌های $C-Vine$ و $D-Vine$ انواع درخت انتخابی معمول هستند. در یک درخت $C-Vine$ ، مطابق با شکل ۱ وابستگی با توجه به یک متغیر خاص (به‌عنوان اولین گره ریشه) توسط مفصل‌های دومتغیره برای هر جفت مدل می‌شود. با توجه به این متغیر، وابستگی‌های جفت‌های دیگر با توجه به متغیر دوم انتخاب می‌شوند که به آن گره ریشه دوم گفته می‌شود. به‌طور کلی، یک گره ریشه در هر درخت انتخاب می‌شود و کلیه وابستگی‌های جفتی با توجه به این گره، مدل شده و براساس همه گره‌های ریشه قبلی انجام می‌شود (Shafaie et al., 2017; Nazeri Tahroudi et al., 2022; Nasrolahi et al., 2025).

مفصل $R-Vine$ نسبت به نوع C یا D به دلیل اینکه اجازه می‌دهد طیف‌های گسترده‌تری از ساختارها فراهم شود، انعطاف‌پذیری بیشتری دارد. به منظور افزایش تنوع ساختار، مفصل $R-Vine$ مفهوم جدیدی را ارائه می‌دهند (Amini et al., 2023). به‌عنوان مثال، در سطح اول درخت مقادیر ۷ بعدی، مطابق شکل ۱، جفت‌های $(1,2)$ ، $(2,3)$ ، $(3,4)$ ، $(2,5)$ ، $(3,6)$ و $(6,7)$ تخمین زده می‌شوند. در حالی که در

کاربرد توابع مفصل در مطالعات هیدرولوژی

یکی از کاربردهای قابل توجه توابع مفصل در تحقیقات آب‌های زیرزمینی، ارزیابی روابط تغذیه و تخلیه آب زیرزمینی است که در آن توزیع توأم بارش و سطوح آب زیرزمینی می‌تواند تحلیل شود. علاوه بر این، مفصل‌ها می‌توانند با مدل‌سازی رفتار توأم متغیرهای هیدروژئولوژیک تحت شرایط آب و هوایی مختلف، به ارزیابی ریسک منابع آب زیرزمینی کمک کنند که می‌تواند باعث بهبود مدیریت و حفاظت از منابع آب زیرزمینی شود. به‌عنوان مثال، در مطالعاتی که رفتار توأم میزان بارش و سطح آب زیرزمینی را بررسی می‌کنند، از مفصل‌ها برای درک رویدادهای حدی، مانند خشکسالی یا سیل و تأثیر آنها بر منابع آب زیرزمینی استفاده شده است. این رویکرد به محققان اجازه می‌دهد تا روابط غیرخطی و وابستگی‌های سری‌های زمانی را مدل کنند و تحلیل ریسک جامع‌تری ارائه نمایند.

مطالعات مختلف نشان می‌دهد که روش‌های تک‌متغیره تجزیه و تحلیل رویدادهای هیدرولوژیک معمولاً منجر به دست کم‌گرفتن یا تخمین بیش از حد می‌شوند (Raynal- Villaseñor and Salas, 1987; Yue et al., 2001; Ramezani et al., 2023a,b). برای شبیه‌سازی یا پیش‌بینی متغیرهای تصادفی هیدرولوژیک، توجه به مفهوم وابستگی حائز اهمیت است. از آنجایی که ضرایب همبستگی خطی و رتبه‌ای نمی‌توانند این مفهوم را به طور کامل اندازه‌گیری کنند، روش‌های جایگزین برای اندازه‌گیری وابستگی تصادفی متغیرها تکامل یافته‌اند. نظریه اسکالر در بسیاری از تحقیقات در زمینه آمار استفاده شده است (Sklar, 1959). مفهوم استفاده از توابع احتمال توأم در زمینه‌های مختلف هیدرولوژیک، مانند مدل‌سازی و مدیریت سیل و دبی جریان (Fu and Butler, 2014; Yang et al., 2021; Ahangi et al., 2022; Sharifan et al., 2024; Mirabbasi et al., 2024) تحلیل چندمتغیره مشخصه‌های بارش (Salvadori and De Michele, 2006; Zhang and Singh, 2007a; Kao and Govindaraju, 2008; Serinaldi, 2009a,b; Zhang et al., 2013)، تحلیل چندمتغیره خشکسالی (Wang et al., 2010; Shiao, 2006; Salvadori and De Michele, 2004; Chen et al., 2013; Sadeghfam et al., 2022)، احتمال توأم رسوب و رواناب (Zhang et al., 2014; Vahidi et al., 2024)، مهندسی پی (Malekpour et al., 2023; Sadeghian et al., 2024) و مطالعات آب‌های زیرزمینی (Belkhir et al., 2010; Elumalai et al., 2017; Paul et al., 2019; Tahroudi et al., 2020; Chen et al., 2020; Yadav et al., 2020;

Chen et al., 2022; Zavareh et al., 2023; Birjandi et al., 2024) بررسی شده است.

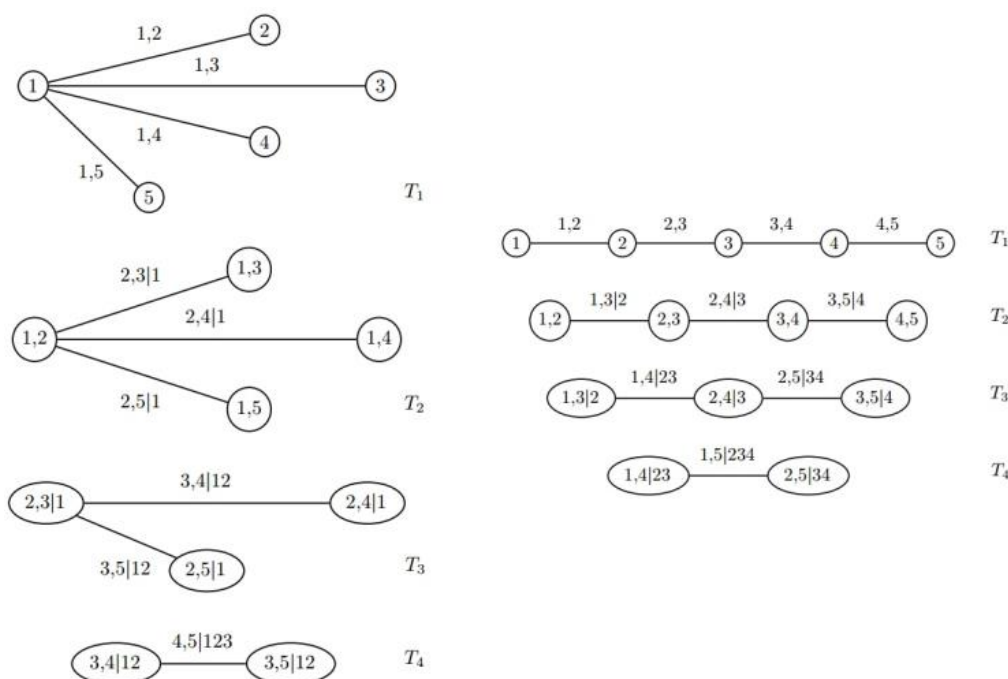
رایج‌ترین انواع مفصل‌ها در حالت دوبعدی، مفصل‌های گاوسی، مفصل‌های ارشمیدسی (مانند Gumbel, Clayton) و t -copulas هستند که در هیدرولوژی و منابع آب کاربرد فراوانی دارند. هر نوع از این توابع دارای ویژگی‌های منحصر به فردی است که برای انواع مختلف داده‌ها و روابط آنها مناسب است. (Salvadori and De Michele, 2004) برای اولین بار یک چارچوب نظری برای استفاده از توابع مفصل در تحلیل فراوانی رویدادهای هیدرولوژیک از جمله آب‌های زیرزمینی ارائه دادند. در آن مطالعه، ساده‌سازی محاسبات و استخراج عبارات تحلیلی برای دوره بازگشت مورد بحث قرار گرفت.

مطالعات متعددی از مفصل‌ها برای تحلیل رابطه بین سطوح آب زیرزمینی در ایستگاه‌های پایش مختلف استفاده کرده‌اند. به‌عنوان مثال، Kwon et al. (2015) از مفصل‌های گاوسی برای مدل‌سازی توزیع احتمال توأم سطوح آب زیرزمینی در میان چاه‌های متعدد در یک سیستم آبخوان آبرفتی استفاده کردند. نتایج آنها وابستگی‌های زمانی قابل توجهی را نشان داد که روش‌های سنتی نتوانستند آنها را توصیف کنند.

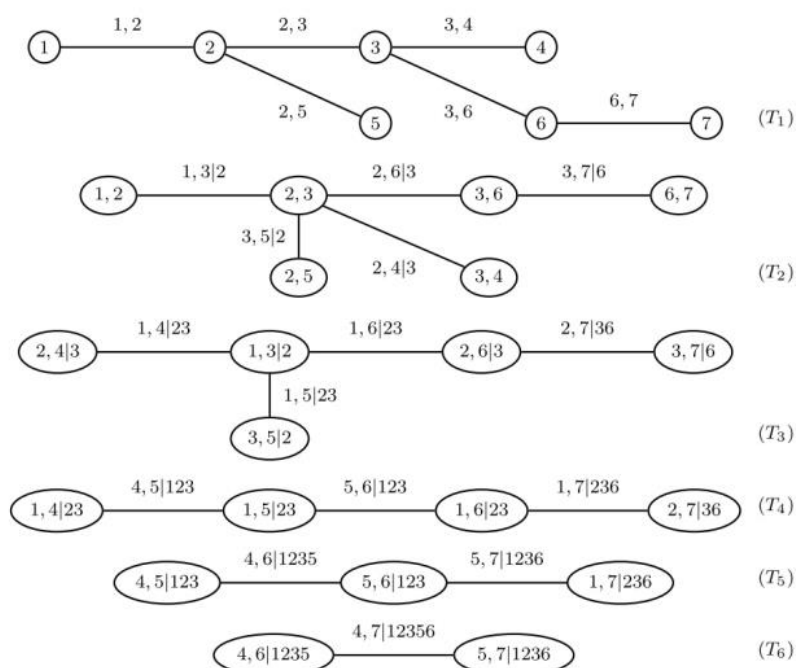
روش‌های مبتنی بر مفصل نیز در ارزیابی کیفیت آب‌های زیرزمینی با بررسی همبستگی‌های بین چند آلاینده یا شاخص‌های کیفیت آب به کار گرفته شده‌اند (Birjandi et al., 2024). برای مثال، Zhang et al. (2018) از مفصل‌های ارشمیدسی برای کشف وابستگی بین غلظت نترات از منابع مختلف در سفره‌های زیرزمینی تحت تأثیر رواناب کشاورزی استفاده کردند.

توابع مفصل در مدل‌سازی برهمکنش‌های بین سیستم‌های آب‌های زیرزمینی و آب‌های سطحی به دلیل توانایی آنها در تعیین احتمالات توأم به طور موثر می‌تواند مفید باشند (He et al., 2020). این مطالعات اغلب بر درک چگونگی تأثیر استخراج آب‌های سطحی بر سطوح آبخوان محلی یا بالعکس تمرکز می‌کنند. در تحلیل خشکسالی، مطالعات مربوط به بارش و دبی جریان در کنار سطوح آب زیرزمینی در طول دوره‌های زمانی مختلف می‌تواند با دقت بیشتری با استفاده از ساختارهای وابستگی ارائه شده توسط توابع مفصل مدل‌سازی شود (Park et al., 2012; Yoo et al., 2024). نشان دادند که استفاده از یک مفصل t دو متغیره عملکرد پیش‌بینی بهتری را در طول رویدادهای حدی در مقایسه با مدل‌های مستقل مرسوم ارائه می‌کند.

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)f_4(x_4)c_{12}\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}. \\
 c_{13}\{F_1(x_1), F_3(x_3)\}c_{14}\{F_1(x_1), F_4(x_4)\}c_{23|1}\{F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)\}. \\
 c_{24|1}\{F(x_2|x_1), F(x_4|x_1)\}c_{34|12}\{F(x_3|x_1, x_2), F(x_4|x_1, x_2)\} \\
 f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)f_4(x_4)c_{12}\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}. \\
 c_{34}\{F_3(x_3), F_4(x_4)\}c_{13|2}\{F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)\}c_{24|3}\{F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)\}. \\
 c_{14|23}\{F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)\}.
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$



شکل ۱- مثالی از مفصل‌های ۵ بعدی D-Vine و C-Vine (Czado, 2019)



شکل ۲- نمونه‌ای از مفصل R هفت بعدی (Czado, 2019)

پتانسیل آب‌های زیرزمینی مقایسه کردند و نشان دادند که توابع مفصل می‌توانند چارچوبی قوی برای تحلیل تغییرات منابع آب زیرزمینی و عوامل شرطی‌سازی آن ارائه دهند. این می‌تواند به استراتژی‌های بهبودیافته برای شناسایی و مدیریت منابع آب زیرزمینی، به‌ویژه در مناطق خشک منجر شود.

وابستگی متقابل کیفیت و سطح آب زیرزمینی نیز از طریق توابع مفصل بررسی شده است. Tahmassebipoor et al. (2016) بیان کردند که با استفاده از توابع مفصل، محققان می‌توانند رابطه بین شاخص‌های کیفیت آب زیرزمینی و عوامل تأثیرگذار، مانند میزان بارندگی و سطح آب زیرزمینی را مدل کنند. این مدل‌سازی می‌تواند شناخت خطرات آلودگی آب‌های زیرزمینی را به طور قابل توجهی افزایش دهد و چارچوبی جامع برای مدیریت کیفیت آب ارائه دهد.

Mensi et al. (2017) اثربخشی توابع مفصل را در مدل کردن ساختار وابستگی بین متغیرهای مختلف هیدرولوژیک نشان دادند. این قابلیت به‌ویژه در مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی که در آن عوامل مرتبط مختلف، مانند میزان بارندگی و سطح آب، به‌صورت پویا در تعامل هستند، سودمند است. Gräler et al. (2013) مفهوم دوره‌های بازگشت چندمتغیره در هیدرولوژی را توضیح دادند. آنها نشان دادند که توابع مفصل می‌توانند درک بهتری از رفتار توأم متغیرهای هیدرولوژیک ارائه کنند، بنابراین استراتژی‌های مدیریت آب‌های زیرزمینی را تقویت می‌کنند.

بررسی منابع تحقیقاتی مختلف نشان می‌دهد که اثربخشی توابع مفصل در مدل‌سازی ساختار وابستگی متغیرهای مختلف می‌تواند مستقیماً به مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی مرتبط شود. به‌عنوان مثال، Lojowska et al. (2012) و Xie et al. (2017) و Nazeri Tahroudi et al. (2023c) نشان دادند که چگونه توابع مفصل می‌توانند توزیع توأم متغیرهای هیدرولوژیکی را مدل‌سازی کنند که با توصیف روابط بین عوامل مختلف، مانند بارندگی، دبی و متغیرهای کیفیت آب، موجب تقویت مطالعات آب‌های زیرزمینی می‌شوند. بینش‌های به‌دست‌آمده از این مطالعات می‌تواند منجر به توسعه مدل‌های آب زیرزمینی قوی‌تر شود که وابستگی‌های متقابل بین متغیرهای کلیدی را توضیح می‌دهد.

Lucca et al. (2017) توابع تجمع مبتنی بر مفصل، مانند Choquet را بررسی کردند که به طور بالقوه می‌تواند در سیستم‌های طبقه‌بندی مبتنی بر قوانین فازی برای داده‌های آب‌های زیرزمینی اعمال شود و فرآیندهای تصمیم‌گیری در مدیریت آب‌های زیرزمینی را بهبود بخشد. ادغام چنین

تکنیک‌های ریزمقیاس‌نمایی آماری که قبل از اجرای شبیه‌سازی‌ها برای سناریوهای اقلیمی آینده استفاده می‌شوند، اغلب به درک اینکه چگونه متغیرهای مرتبط با آب و هوا بر هیدرولوژی منطقه‌ای از جمله در دسترس بودن آب زیرزمینی تأثیر می‌گذارند، متکی هستند. در این خصوص نیز توابع مفصل می‌توانند بسیار مفید باشند. زیرا آنها به طور مؤثر توزیع توأم متغیرهای آب و هوا و سطح آب زیرزمینی را به تصویر می‌کشند (Khan et al., 2017). ساختارهای وابستگی لحاظ شده توسط توابع مفصل، امکان پیش‌بینی دقیق‌تری از منابع آب زیرزمینی را تحت سناریوهای مختلف آب و هوایی فراهم می‌کنند.

Jaworski et al. (2010) با تأکید بر کاربرد توابع مفصل در مدل‌سازی چندمتغیره در زمینه‌های مختلف، از جمله هیدرولوژی، یک نمای کلی جامع از نظریه اسکالر و کاربردهای آن ارائه کردند. این مبنای نظری برای درک اینکه چگونه توابع مفصل می‌توانند برای مدل کردن وابستگی‌های بین متغیرهای مرتبط با آب‌های زیرزمینی استفاده شوند، بسیار مهم است.

Vandenbergh et al. (2011) یک تحلیل مقایسه‌ای با استفاده از توابع مفصل برای تحلیل فراوانی دومتغیره رویدادهای بارشی انجام دادند و بر اهمیت در نظر گرفتن وابستگی‌های چندمتغیره در زمینه‌های هیدرولوژیکی تأکید کردند. این رویکرد به‌ویژه برای مطالعات آب‌های زیرزمینی صادق است، زیرا مدل‌سازی وقوع توأم رویدادهای هیدرولوژیک (به‌عنوان مثال، بارندگی شدید و رواناب حاصل از آن) برای مدیریت مؤثر این منابع بسیار مهم است.

Lee and Salas (2011) کاربرد مفهوم مفصل برای شبیه‌سازی جریان تصادفی را بررسی کردند. ایشان در مطالعه خود دو ویژگی عمده مدل‌های مبتنی بر مفصل را به‌صورت زیر بیان کردند: (۱) به تصویر کشیدن ناهمگونی موجود در همبستگی داده‌های مشاهده‌شده و (۲) انعطاف‌پذیری توزیع‌های حاشیه‌ای قابل کاربرد.

Asher et al. (2015) عملکرد توابع مفصل در مدل‌سازی سیستم‌های آب زیرزمینی را برجسته می‌کنند و توصیه کردند که ادغام توابع مفصل در فرآیند مدل‌سازی، می‌تواند نمایش وابستگی‌ها را بین پارامترهای ورودی بهبود بخشد که برای تحلیل عدم قطعیت و تحلیل حساسیت مدل حیاتی است.

تحقیقات مختلف به طور فزاینده‌ای روش‌های آماری چندمتغیره را برای ارزیابی ویژگی‌های آب زیرزمینی توصیه کرده‌اند. Naghibi and Pourghasemi (2015) مدل‌های یادگیری ماشین را با روش‌های آماری برای نقشه‌برداری

توابع مفصل باز کرده است. (Tao et al. (2022) یک بررسی جامع از مدل‌های یادگیری ماشین برای پیش‌بینی سطح آب‌های زیرزمینی ارائه نمودند و پتانسیل عملکردهای مفصل را برای بهبود دقت این پیش‌بینی‌ها با مدل‌سازی وابستگی‌های متقابل بین پیش‌بینی‌کننده‌های مختلف بررسی کردند. این رویکرد می‌تواند منجر به پیش‌بینی‌های قابل اعتمادتر و استراتژی‌های بهتر مدیریت منابع آب، به ویژه در عدم قطعیت‌های اقلیمی شود.

Nazeri Tahroudi et al. (2023a) با ارزیابی کارایی توابع مفصل در مدل‌سازی و شبیه‌سازی‌های متغیرهای هواشناسی و هیدرولوژیک بیان کردند که توزیع احتمال توأم جفت متغیرهای یاد شده و همچنین ترکیب آن‌ها با سطوح آب زیرزمینی، مدیریت جامع و یکپارچه حوضه آبریز را به همراه خواهد داشت. همچنین ایشان بیان کردند که این موضوع به درک احتمال وقوع رویدادهای حدی همزمان، مانند خشکسالی و سیل کمک می‌کند. آن‌ها با بررسی مطالعات مختلف در حوزه کاربرد توابع مفصل بیان کردند که با استفاده از توابع مفصل، محققین می‌توانند احتمال شرطی یک متغیر را با توجه به وقوع متغیر دیگر تخمین بزنند. این امر به‌ویژه در مطالعات آب‌های زیرزمینی برای ارزیابی تأثیر یک رویداد هیدرولوژیکی بر رویداد دیگر مفید است.

ارزیابی مکانی و پهنه‌بندی پارامترهای کمی و کیفی آب زیرزمینی برای مدیریت پایدار و حفاظت از این منبع ضروری است. روش‌های آماری سنتی اغلب استقلال یا روابط خطی بین متغیرها را فرض می‌کنند که ممکن است به اندازه کافی وابستگی‌های پیچیده در سیستم‌های هیدرولوژیکی را نشان ندهند. توابع مفصل به‌عنوان یک ابزار قدرتمند و انعطاف‌پذیر برای مدل‌سازی این وابستگی‌ها با ایجاد توزیع‌های توأم بدون فرض شکل خاصی از توزیع‌های حاشیه‌ای پدید آمده‌اند. در زمینه تحلیل مکانی و میان‌یابی متغیرهای کمی و کیفی آب زیرزمینی نیز مطالعاتی انجام شده است که برتری روش مبتنی بر مفصل را نسبت به روش‌های زمین‌آمار تایید می‌کنند (Bárdossy, 2011).

Bárdossy (2008) در تحقیق خود بیان کرد که توابع مفصل امکان خوبی برای توصیف ساختارهای وابستگی برای توزیع‌های چند متغیره ارائه می‌دهند. مفصل‌های تجربی دو متغیره می‌توانند به عنوان جایگزینی برای واریوگرام‌ها و توابع کوواریانس برای توصیف تنوع مکانی استفاده شوند.

تکنیک‌های مدل‌سازی پیشرفته می‌تواند به بهبود قابلیت‌های پیش‌بینی در ارزیابی‌های منابع آب زیرزمینی منجر شود. تحقیقات اهمیت استفاده از توابع مفصل را برای تحلیل ساختار وابستگی بین متغیرهای محیطی مؤثر بر سطح آب زیرزمینی نشان داده‌اند. به‌طور مثال، (Bevacqua et al. (2017 کاربرد ساختارهای جفت-مفصل را برای مدل‌سازی رویدادهای ترکیبی برجسته و تأکید می‌کنند که نادیده گرفتن وابستگی‌ها می‌تواند منجر به دست کم گرفتن خطرات در مدیریت آب‌های زیرزمینی شود. این امر به ویژه برای ارزیابی خطرات سیل که در آن بارش و موج سیلاب ناشی از آن در رودخانه می‌تواند به طور مشترک بر سطح آب‌های زیرزمینی تأثیر بگذارد، مفید است.

کاربرد توابع مفصل اجازه می‌دهد تا درک دقیقی از توزیع توأم سطوح آب زیرزمینی با سایر متغیرهای آب و هوایی داشته باشیم. به‌طور مثال، (Chen et al. (2018 نشان دادند که استفاده از توابع مفصل می‌تواند پیش‌بینی و مدیریت منابع آب زیرزمینی را با ثبت دقیق روابط بین سطوح آب زیرزمینی و عوامل خارجی مانند بارندگی و دما افزایش دهد. این ادغام برای بهبود ارزیابی ریسک و توسعه استراتژی‌های مدیریت مؤثر ضروری است.

Bai et al. (2020) در مطالعات خود در خصوص تحلیل احتمالاتی عمق آب زیرزمینی در حوضه رودخانه یارکلنت^۱ چین بیان کردند که مدل‌های مبتنی بر مفصل برای شبیه‌سازی سطوح آب زیرزمینی تحت سناریوهای مختلف، به پیش‌بینی و مدیریت منابع آب زیرزمینی کمک می‌کنند. این مدل‌ها می‌توانند وابستگی‌های بین متغیرهای هیدرولوژیک مختلف را برای بهبود پیش‌بینی ترکیب کنند.

Liu et al. (2021) بیان کردند که توابع مفصل امکان تجزیه و تحلیل چندین متغیر مرتبط با آب‌های زیرزمینی را به طور همزمان فراهم می‌کنند، مانند سطح آب زیرزمینی، نرخ تغذیه و نرخ برداشت از آبخوان. این رویکرد چندمتغیره، ارزیابی ریسک جامع‌تری را ارائه می‌دهد.

Tootoonchi et al. (2022) با بررسی کاربرد توابع مفصل در تجزیه و تحلیل و شبیه‌سازی آب‌های زیرزمینی، دستورالعمل‌هایی برای پیاده‌سازی مدل‌های مبتنی بر مفصل ارائه کردند.

پیشرفت‌های اخیر در یادگیری ماشین، افق‌هایی را برای افزایش دقت پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی از طریق ادغام با

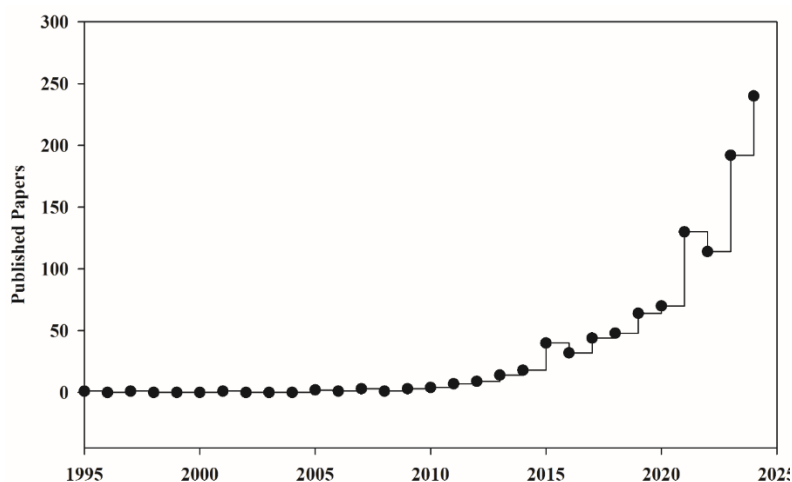
استخراج اطلاعات از داده‌های مکانی استفاده کردند. آنها از مفصل‌های واین برای تولید نقشه‌های نقاط مدنظر با ادغام ۵ داده نزدیکترین چاه استفاده کردند. نتایج نشان داد در مقایسه با مدل‌های مرسوم، روش مبتنی بر مفصل می‌تواند همبستگی فضایی محلی بین نقاط مدنظر را به شیوه‌ای مؤثرتر و با دقت بیشتری بیان کند. (Mirabbasi et al., 2024) یک روش احتمالی مبتنی بر تحلیل دو متغیره برای تخمین دبی چشمه پیشنهاد کردند. در این روش توزیع دو متغیره خروجی چشمه‌های موجود در منطقه مورد مطالعه با استفاده از توابع مفصل ایجاد شد. آنها با کمک توزیع دو متغیره ایجاد شده و با فرض سطح احتمال معین، موفق به تخمین دبی چشمه موردنظر، بر اساس دبی چشمه‌های اطراف شدند.

نتایج بررسی‌ها در حوزه کمیت و کیفیت آب زیرزمینی نشان داد که مفصل‌ها می‌توانند طیف وسیعی از ساختارهای وابستگی، از جمله عدم تقارن و وابستگی دمی^۱ را مدل کنند. توزیع‌های حاشیه‌ای را می‌توان به طور مستقل مدل‌سازی کرد و امکان استفاده از رویکردهای تجربی یا نیمه پارامتری را فراهم نمود. همچنین با در نظر گرفتن وابستگی‌های پیچیده، مدل‌های مبتنی بر مفصل پیش‌بینی‌های دقیق‌تری نسبت به روش‌های سنتی ارائه می‌دهند.

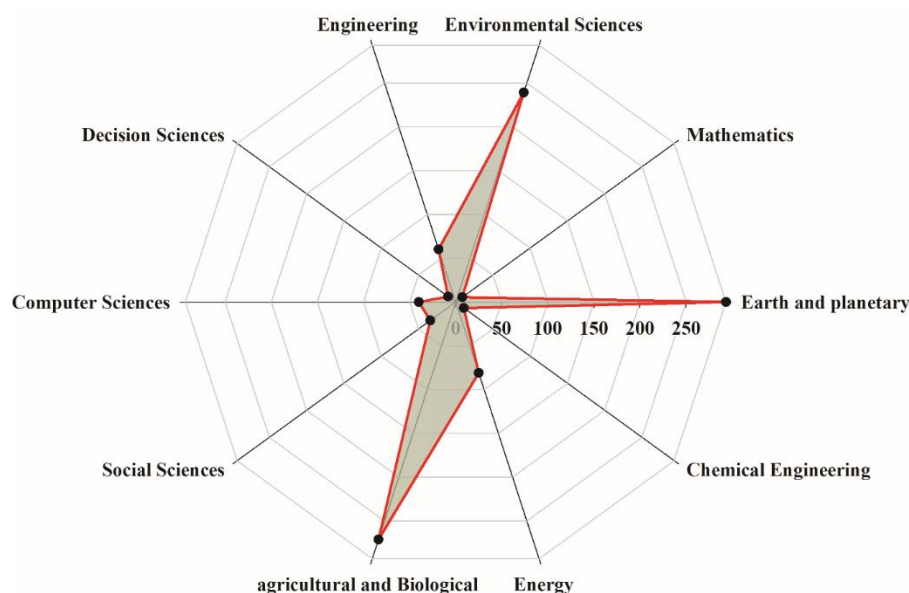
با بررسی موضوعات مختلف و پایگاه‌های مختلف اعم از اسکوپوس و با کلیدواژه‌های Copula و Groundwater تعداد ۱۰۴۸ مقاله چاپ شده در حوزه کاربرد توابع مفصل در آب زیرزمینی بدست آمد که با توجه به سال چاپ و همچنین موضوع چاپ شده به ترتیب به صورت شکل‌های ۳ و ۴ ارائه گردید. با توجه به شکل ۳ می‌توان روند افزایشی مطالعات این حوزه را در سال‌های اخیر مشاهده کرد. این موضوع با توجه به نتایج ارائه شده در مطالعات چاپ شده به دلیل تطابق خوب مدل‌های مبتنی بر مفصل با مقادیر حدی می‌باشد که در سال‌های اخیر رویه افزایش بوده است (Khalili et al., 2016; Nazeri Tahroudi et al., 2023a,b; Ramezani et al., 2023). با توجه به شکل ۴ نیز می‌توان مشاهده کرد که ۷۷ درصد مطالعات صورت گرفته در زمینه توابع مفصل و آب زیرزمینی در سه حوزه علوم زمین، کشاورزی و بیولوژی و علوم محیطی صورت گرفته است.

همبستگی‌های رتبه‌ای این مفصل‌ها قدرت وابستگی را مستقل از توزیع‌های حاشیه‌ای بیان می‌کنند و بنابراین جایگزینی برای واریوگرام‌ها ارائه می‌دهند (Bárdossy, 2006). Bárdossy and Hörning (2016) برای چهار پارامتر کیفیت، کلرید، سولفات، pH، و نیتрат، به دست آمده از یک شبکه اندازه‌گیری کیفیت آب زیرزمینی در مقیاس بزرگ در بادن-وورتمبرگ (آلمان) ساختار وابستگی مکانی را بررسی کرده و بیان کرد که این وابستگی گاوسی نیست. در نهایت بیان کرد که با توجه به نتایج آزمون، مفصل گاوسی برای اکثر پارامترها رد می‌شود، در حالی که مفصل‌های غیرگاوسی در بیشتر موارد رد نمی‌شوند.

کیفیت آب زیرزمینی تحت تأثیر عوامل متعددی مانند pH، هدایت الکتریکی (EC)، کل مواد جامد محلول (TDS)، نیترات، کلرید و فلزات سنگین است. این پارامترها اغلب وابستگی‌های متقابل پیچیده‌ای را نشان می‌دهند که به کمک توابع مفصل می‌توان آن‌ها را آشکار کرد. به عنوان مثال، Banerjee et al. (2024) از مفصل‌های ارشمیدسی برای تجزیه و تحلیل توزیع احتمال توأم TDS و EC در یک سیستم آبخوان استفاده کردند. آنها نشان دادند که مفصل‌ها بینش بهتری را در مورد تغییرات مشترک این پارامترها در مقایسه با تحلیل همبستگی سنتی ارائه می‌دهند. Birjandi et al. (2024) با استفاده از توابع مفصل به تجزیه و تحلیل چند متغیره متغیرهای کیفی آب زیرزمینی (شامل SAR، K، HCO_3^- ، TH، SO_4 ، TDS، pH، EC، Cl، Ca، Na، Mg) در دشت شهرکرد، پرداختند. بر اساس نتایج تحلیل نقطه‌ای، تابع مفصل جو به عنوان بهترین تابع مفصل برای تحلیل چند متغیره دو متغیره کیفیت در یک چاه انتخاب شد. برای تجزیه و تحلیل بین چاهی، تابع مفصل کلایتون برای ایجاد توزیع دو متغیره در دو چاه مختلف انتخاب شد. مقایسه عملکرد روش پیشنهادی چند چاهی با روش‌های زمین آماری نشان داد که روش چند چاهی به ویژه در مناطقی که تعداد چاه‌های نمونه برداری کمتر است، از دقت قابل قبولی برخوردار است و عملکرد بهتری نسبت به روش‌های زمین آمار دارد. Zhang et al. (2024) بیان کردند که ساختار همبستگی مکانی منابع غیرمتعارف بسته به فاصله دو چاه در کاربردهای عملی متفاوت است. برای غلبه بر این مشکل، آنها از یک مدل مکانی برای



شکل ۳- تعداد مقالات منتشر شده در زمینه کاربرد توابع مفصل در مطالعات آب‌های زیرزمینی در دوره ۱۹۹۵-۲۰۲۴



شکل ۴- مطالعات منتشر شده در زمینه توابع مفصل و آب زیرزمینی بر اساس موضوع تا انتهای سال ۲۰۲۴

نتایج و بحث

علیرغم وجود پژوهش‌های رو به رشد در مورد کاربرد توابع مفصل در هیدرولوژی، چندین شکاف احساس می‌شود. به عنوان مثال، در حالی که مفصل‌ها به طور موثر در تجزیه و تحلیل فرکانس سیل و مدل‌سازی رویداد بارشی استفاده شده‌اند، کاربرد آن‌ها در سیستم‌های آب زیرزمینی پیچیده‌تر، که اغلب شامل متغیرهای توزیع‌شده مکانی و ناهمگنی هستند، هنوز بررسی نشده است. علاوه بر این، ادغام توابع مفصل با سایر تکنیک‌های مدل‌سازی، مانند مدل‌های سلسله مراتبی بیزی، فرصتی برای تحقیقات آینده ارائه می‌کند. Czado and Nagler (2022) پیشنهاد می‌کنند که مفصل‌های واین می‌توانند قابلیت‌های مدل‌سازی را با اجازه دادن به ساختارهای وابستگی انعطاف‌پذیر در میان متغیرهای

هیدرولوژیک متعدد افزایش دهند. این رویکرد می‌تواند به ویژه برای توصیف وابستگی‌های مکانی سیستم‌های آب زیرزمینی، که اغلب تحت تأثیر عوامل متعددی به هم مرتبط هستند، مفید باشد. علاوه بر این، نیاز به مطالعاتی وجود دارد که بر اجرای عملی مدل‌های مبتنی بر مفصل در سناریوهای مدیریت آب‌های زیرزمینی واقعی تمرکز دارند. هدف پژوهش باید کمی کردن مزایای استفاده از مفصل‌ها از نظر دقت پیش‌بینی و کارایی مدیریت منابع و ارائه شواهد تجربی برای حمایت از پذیرش آنها در مطالعات آب‌های زیرزمینی باشد. نتایج بررسی مرور منابع و مطالعات صورت گرفته در زمینه تغییر اقلیم نشان می‌دهد که بیشتر مطالعات بر مناطق جغرافیایی خاص تمرکز می‌کنند و تعمیم یافته‌ها را محدود می‌کنند. نیاز به مطالعات موردی گسترده‌تر در محیط‌های

برانگیز باشد. تعیین مفصل نادرست می‌تواند منجر به نتایج ضعیف مدل‌سازی شود (Patton, 2012).

پیچیدگی محاسباتی: فرآیند تخمین برای پارامترهای توابع مفصل می‌تواند از نظر محاسباتی پیچیده باشد، به‌ویژه هنگامی که با مجموعه داده‌های بزرگ سروکار داریم (Aas et al., 2009).

نیازهای داده: داده‌های با کیفیت برای مدل‌سازی موثر با توابع مفصل ضروری است. خلاء آماری یا داده‌های گمشده می‌تواند به شدت بر نتایج تأثیر بگذارد.

به‌طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که توابع مفصل ابزارهای قدرتمندی در مدل‌سازی وابستگی بین متغیرهای تصادفی هستند و در مطالعات آب زیرزمینی نیز کاربردهای عملی متعددی دارند که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف: مدل‌سازی وابستگی بین پارامترهای هیدروژئولوژیک از طریق تحلیل وابستگی بین متغیرهایی مانند تراز آب زیرزمینی، بارش، نفوذپذیری و کیفیت آب و همچنین مدل‌سازی وابستگی بین سطح آب زیرزمینی و بارش در یک آبخوان

ب: تحلیل خطر خشکسالی و افت سطح آب زیرزمینی

ج: پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی با در نظر گرفتن عدم قطعیت

د: مدل‌سازی چندمتغیره کیفیت آب زیرزمینی

ه: بهینه‌سازی مدیریت آب زیرزمینی با ارزیابی ریسک برداشت بیش از حد و تعیین حد مجاز پمپاژ که نتایج آن می‌تواند در برنامه‌ریزی تصادفی برای مدیریت پایدار به کار رود

نتیجه‌گیری

استفاده از توابع مفصل در مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی، یک راهکار امیدوارکننده برای افزایش درک بهتر از پدیده‌ها و مدیریت منابع آب زیرزمینی ارائه می‌کند. بررسی منابع، کاربرد توابع مفصل را در اعمال وابستگی میان متغیرهای هیدروژئولوژیک در تحلیل فراوانی‌ها که برای مدل‌سازی دقیق و مدیریت منابع ضروری است، برجسته می‌کند. با این حال، مطالعات کمی در مورد کاربرد آنها در سیستم‌های پیچیده آب زیرزمینی و ادغام با سایر رویکردهای مدل‌سازی صورت گرفته است. تحقیقات آینده باید روی پرداختن به این موضوع‌ها تمرکز کنند تا به طور کامل پتانسیل عملکرد توابع مفصل در مطالعات آب‌های زیرزمینی درک شود.

استفاده از توابع مفصل در تحقیقات آب‌های زیرزمینی نتایج امیدوارکننده‌ای را در جنبه‌های مختلف، مانند نوسانات سطح

مختلف برای تأیید اثربخشی عملکرد توابع مفصل در زمینه‌های مختلف هیدروژئولوژیک وجود دارد. در حلی که برخی تحقیقات برای بررسی تأثیرات تغییر اقلیم بر سطح آب‌های زیرزمینی با استفاده از توابع مفصل آغاز شده‌اند، اما هنوز مطالعات جامعی که روندهای بلندمدت و پیامدهای آنها را برای مدیریت منابع آب بررسی کند، وجود ندارد. اگرچه توابع مفصل می‌توانند وابستگی‌ها را در بین متغیرهای متعدد نشان دهند، مطالعات اغلب بر تعداد محدودی از عوامل تمرکز می‌کنند. تعاملات پیچیده‌تر، مانند آنهایی که شامل متغیرهای اجتماعی-اقتصادی، تغییرات کاربری زمین و تأثیرات سیاستی است، نیاز به کاوش بیشتر دارد. همچنین اغلب مطالعات انجام شده با قرض ایستا بودن سری زمانی داده‌ها انجام شده است. در زمینه لحاظ کردن ناپایداری داده‌ها در توزیع‌های حاشیه‌ای و همچنین توابع مفصل مطالعات مختلف قبل انجام است (Galiatsatou et al., 2019; Karamouz & Mohammadi, 2020; Razmi et al., 2022; Radfar et al., 2023).

مزایای استفاده از توابع مفصل با توجه به مطالعات مختلف در حوزه آب زیرزمینی به شرح زیر خلاصه می‌شود:

انعطاف‌پذیری در مدل‌سازی وابستگی: مفصل‌ها انعطاف‌پذیری را برای مدل‌سازی وابستگی‌های غیرخطی بین متغیرها فراهم می‌کنند، که به ویژه در سیستم‌های هیدروژئولوژیک پیچیده که روابط آنها کاملاً خطی نیستند، مفید است.

جداسازی توزیع‌های حاشیه‌ای و توأم: با جدا کردن توزیع‌های حاشیه‌ای از ساختار وابستگی آنها، مفصل‌ها به محققان اجازه می‌دهند تا مدل‌های حاشیه‌ای مختلفی را اعمال کنند که برازش بهتری بر داده‌های مشاهده شده دارند.

ارزیابی ریسک بهبودیافته: توانایی مدل‌سازی رویدادهای حادی و وابستگی‌های دمی با استفاده از مفصل‌ها به ارزیابی بهتر ریسک کمک می‌کند که برای استراتژی‌های مدیریت آب‌های زیرزمینی بسیار مهم است (Ghosh & Basu, 2020).

علیرغم مزایای آنها، کاربرد توابع مفصل در مطالعات آب‌های زیرزمینی با چالش‌های خاصی نیز مواجه است. چالش‌ها و محدودیت‌های این حوزه نیز با توجه به مطالعات مختلف به شرح زیر خلاصه می‌شود:

انتخاب تابع مفصل: تعیین نوع مناسب مفصل که به طور دقیق برازش مناسبی با داده‌ها داشته باشد، می‌تواند چالش

اصول اخلاقی

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این اثر عملی رعایت نموده‌اند و این موضوع مورد تایید همه آنها می‌باشد.

منابع

- 1- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., and Bakken, H., 2009. Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), pp. 182-198. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.02.001>
- 2- Ahangi, G., Khalili, K., and Nazeri Tahroudi, M., 2022. Frequency analysis and joint simulation of qualitative variables of river flow using copula functions. *Water Harvesting Research*, 5(1), pp. 131-143. <https://doi.org/10.22077/jwhr.2023.5944.1076>
- 3- Amini, S., Zare Bidaki, R., Mirabbasi, R., and Shafaei, M., 2022. Flood risk analysis based on nested copula structure in Armand Basin, Iran. *Acta Geophysica*, 70: pp. 1385-1399. <https://doi.org/10.1007/s11600-022-00766-y>
- 4- Amini, S., Zare Bidaki, R., Mirabbasi, R., and Shafaei, M., 2023. Multivariate analysis of flood characteristics in Armand Watershed, Iran using vine copulas. *Arabian Journal of Geosciences*, 16: 11, <https://doi.org/10.1007/s12517-022-11102-5>
- 5- Asher, M.J., Croke, B.F., Jakeman, A.J., and Peeters, L.J., 2015. A review of surrogate models and their application to groundwater modeling. *Water Resources Research*, 51(8), pp. 5957-5973. <https://doi.org/10.1002/2015WR016967>
- 6- Bai, Y., Wang, Y., Chen, Y., and Zhang, L., 2020. Probabilistic analysis of the controls on groundwater depth using Copula Functions. *Hydrology Research*, 51(3), pp. 406-422. <https://doi.org/10.2166/nh.2020.147>
- 7- Banerjee, A., Chatterjee, A., Singh, A., Pasupuleti, S., and Uddameri, V., 2024. A risk assessment framework utilizing bivariate copula for contaminate monitoring in groundwater. *Environmental Science and Pollution Research*, 31(37), pp. 49744-49756. <https://doi.org/10.1007/s11356-024-34417-0>
- 8- Bárdossy, A., 2006. Copula-based geostatistical models for groundwater quality parameters. *Water Resources Research*, 42(11), pp. 1-12. <https://doi.org/10.1029/2005WR004754>
- 9- Bárdossy, A., 2011. Interpolation of groundwater quality parameters with some values below the detection limit. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15(9), pp. 2763-2775. <https://doi.org/10.5194/hess-15-2763-2011>
- 10- Bárdossy, A., and Hörning, S., 2016. Gaussian and non-Gaussian inverse modeling of groundwater flow using copulas and random mixing. *Water Resources Research*, 52(6), pp. 4504-4526. <https://doi.org/10.1002/2014WR016820>
- 11- Bárdossy, A., and Li, J., 2008. Geostatistical interpolation using copulas. *Water Resources*

آب زیرزمینی، ارزیابی کیفیت، تعامل با سیستم‌های آب‌های سطحی، تحلیل خشکسالی و ریزمقیاس نمایی آماری نشان داده است. در حالی که آنها مزایای قابل توجهی در مدل‌سازی وابستگی‌های پیچیده در بین متغیرهای هیدرولوژیکی ارائه می‌دهند. محققان باید در انتخاب توابع مفصل دقت لازم را داشته باشند و از دقت و کیفیت داده‌های ورودی برای نیل به نتایج قابل اعتماد، اطمینان حاصل کنند. همچنین با بررسی تحقیقات صورت گرفته در خصوص تحلیل چندمتغیره مبتنی بر مفصل در حوزه آب‌های زیرزمینی می‌توان نتیجه گرفت که ادغام توابع مفصل در تحقیقات آب‌های زیرزمینی، پتانسیل قابل توجهی را برای افزایش شناخت و مدیریت این منبع حیاتی ارائه می‌دهد. با در نظر گرفتن وابستگی‌های متقابل پیچیده بین عوامل مؤثر مختلف، توابع مفصل می‌توانند ارزیابی ریسک را بهبود بخشند و استراتژی‌های مدیریت آب زیرزمینی مؤثرتری را ایجاد کنند. با این حال، پرداختن به شکاف‌های دانش موجود از طریق مطالعات جامع و رویکردهای مدل‌سازی نوآورانه برای تحقق پتانسیل کامل این روش در تحقیقات هیدرولوژیکی ضروری خواهد بود. در این خصوص تلفیق مدل‌های مبتنی بر مفصل و مدل‌های مبتنی بر یادگیری عمیق و یا واریانس شرطی، می‌تواند در شبیه‌سازی‌ها و تحلیل فراوانی توأم پارامترهای آب زیرزمینی مورد استفاده قرار گیرد. در مبحث پهنه‌بندی و تحلیل مکانی متغیرهای آب زیرزمینی نیز می‌توان از توزیع‌های توأم و کریجینگ مبتنی بر مفصل استفاده کرد.

تضاد منافع نویسندگان

در این مقاله هیچ‌گونه تضاد منافی وجود ندارد و این مسئله مورد تایید همه نویسندگان است.

دسترسی به داده‌ها

اطلاعات و داده‌های استفاده شده در این پژوهش از طریق مکاتبه با نویسنده مسئول در اختیار قرار خواهد گرفت.

مشارکت نویسندگان

نحوه و میزان مشارکت نویسندگان در انجام این پژوهش به صورت زیر است:

هر دو نویسنده در جمع‌آوری و تحلیل مطالب، نوشتن و ویرایش مقاله مشارکت داشته‌اند.

- 22-Elumalai, V., Brindha, K., and Lakshmanan, E., 2017. Human exposure risk assessment due to heavy metals in groundwater by pollution index and multivariate statistical methods: a case study from South Africa. *Water*, 9(4), 234. <https://doi.org/10.3390/w9040234>
- 23-Fu, G., and Butler, D., 2014. Copula-based frequency analysis of overflow and flooding in urban drainage systems. *Journal of Hydrology*, 510, pp. 49-58. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2013.12.006>
- 24-Galiatsatou, P., Makris, C., Prinos, P., and Kokkinos, D., 2019. Nonstationary joint probability analysis of extreme marine variables to assess design water levels at the shoreline in a changing climate. *Natural Hazards*, 98, pp. 1051-1089. <https://doi.org/10.1007/s11069-019-03645-w>
- 25-Ghosh, S., and Basu, S.K., 2020. Application of multivariate extreme value theory based on vine-copulas towards risk assessment under environmental scenarios including groundwater contamination sources—A case study from India's aquifers. *Journal of Hydrology*, 501(15), pp. 241-250
- 26-Gräler, B., van den BERG, M.J., Vandenbergh, S., Petroselli, A., Grimaldi, S., De Baets, B., and Verhoest, N.E.C., 2013. Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(4), pp. 1281-1296. <https://doi.org/10.5194/hess-17-1281-2013>
- 27-He, X.H., Zhang, Y.Z., Liu, J.Y., and Zhang, Y.W., 2020. Evaluating impacts caused due flooding events upon surface-ground interface dynamics utilizing bivariate t-Copula framework. *Water Research*, 4464678
- 28-Jaworski, P., Durante, F., Hardle, W. K., and Rychlik, T., 2010. *Copula theory and its applications* (Vol. 198). Berlin: Springer.
- 29-Joe, H., 1997. *Multivariate models and multivariate dependence concepts*: Chapman and Hall/CRC.
- 30-Kao, S.C., and Govindaraju, R.S., 2008. Trivariate statistical analysis of extreme rainfall events via the Plackett family of copulas. *Water Resources Research*, 44(2). <https://doi.org/10.1029/2007WR006261>
- 31-Karamouz, M., and Mohammadi, K., 2020. Nonstationary based framework for performance enhancement of coastal flood mitigation strategies. *Journal of Hydrologic Engineering*, 25(6), 04020020. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.000191](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.000191)
- 32-Khalili, K., Tahoudi, M. N., Mirabbasi, R., and Ahmadi, F., 2016. Investigation of spatial and temporal variability of precipitation in Iran over the last half century. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 30, pp. 1205-1221. <https://doi.org/10.1007/s00477-015-1095-4>
- 33-Khan, M.A.H., Ahmad, T., and Khan, Z.H., 2017. Statistical downscaling approach using Multivariate Skew-Normal Distribution based on Copulation Techniques. *Hydro-environment Research Journal*, 12(10), 10211
- Research, 44(7), <https://doi.org/10.1029/2007WR006115>
- 12-Belkhir, L., Boudoukha, A., Mouni, L., and Baouz, T., 2010. Application of multivariate statistical methods and inverse geochemical modeling for characterization of groundwater—a case study: Ain Azel plain (Algeria). *Geoderma*, 159(3-4), pp. 390-398. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2010.08.016>
- 13-Bevacqua, E., Maraun, D., Hobæk Haff, I., Widmann, M., and Vrac, M., 2017. Multivariate statistical modelling of compound events via pair-copula constructions: analysis of floods in Ravenna (Italy). *Hydrology and Earth System Sciences*, 21(6), pp. 2701-2723. <https://doi.org/10.5194/hess-21-2701-2017>
- 14-Bezák, N., Mikoš, M., and Šraj, M.J.W.R.M., 2014. Trivariate frequency analyses of peak discharge, hydrograph volume and suspended sediment concentration data using copulas. *Water Resources Management*, 28(8), pp. 2195-2212. <https://doi.org/10.1007/s11269-014-0606-2>
- 15-Birjandi, V., Tabatabaei, S.H., Mastouri, R., Mazaheri, H., and Mirabbasi, R., 2024. Multivariate spatial analysis of groundwater quality using copulas. *Acta Geophys.* 72, pp. 1113-1125. <https://doi.org/10.1007/s11600-023-01073-w>
- 16-Chen, L., Singh, V. P., Guo, S., Mishra, A. K., and Guo, J., 2013. Drought analysis using copulas. *Journal of Hydrologic Engineering*, 18(7), pp. 797-808. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.000069](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.000069)
- 17-Chen, W., Li, H., Hou, E., Wang, S., Wang, G., Panahi, M., ... and Ahmad, B.B., 2018. GIS-based groundwater potential analysis using novel ensemble weights-of-evidence with logistic regression and functional tree models. *Science of the Total Environment*, 634, pp. 853-867. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2018.04.055>
- 18-Chen, W., Li, Y., Tsangaratos, P., Shahabi, H., Ilia, I., Xue, W., and Bian, H., 2020. Groundwater spring potential mapping using artificial intelligence approach based on kernel logistic regression, random forest, and alternating decision tree models. *Applied Sciences*, 10(2), 425. <https://doi.org/10.3390/app10020425>
- 19-Chen, Y., Chen, W., Chandra Pal, S., Saha, A., Chowdhuri, I., Adeli, B., ... and Mosavi, A., 2022. Evaluation efficiency of hybrid deep learning algorithms with neural network decision tree and boosting methods for predicting groundwater potential. *Geocarto International*, 37(19), pp. 5564-5584. <https://doi.org/10.1080/10106049.2021.1920635>
- 20-Czado, C., 2019. Analyzing dependent data with vine copulas. *Lecture Notes in Statistics*, Springer, 222.
- 21-Czado, C., and Nagler, T., 2022. Vine copula based modeling. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 9(1), pp. 453-477. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-040220-101153>

- 45-Nazeri Tahroudi, M., and Mirabbasi, R., 2023c. Frequency decomposition associated with machine learning algorithms and copula modeling for river flow prediction. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 37(8), pp. 2897-2918. <https://doi.org/10.1007/s00477-023-02425-0>
- 46-Nazeri Tahroudi, M., Ahmadi, F., and Mirabbasi, R., 2023b. Performance comparison of IHACRES, random forest and copula-based models in rainfall-runoff simulation. *Applied Water Science*, 13(6), 134. <https://doi.org/10.1007/s13201-023-01929-y>
- 47-Nazeri Tahroudi, M., Mirabbasi, R., Nasrolahi, A., and Karimi, S.Y., 2023a. A Review of Copula-Based Approach for Water Resources Time Series. *Water Harvesting Research*, 6(1), pp. 131-144. <https://doi.org/10.22077/jwhr.2023.7034.1119>
- 48-Nazeri Tahroudi, M., Ramezani, Y., De Michele, C., and Mirabbasi, R., 2022. Trivariate joint frequency analysis of water resources deficiency signatures using vine copulas. *Applied Water Science*, 12(4), 67. <https://doi.org/10.1007/s13201-022-01589-4>
- 49-Nelsen, R. B. 2006. An Introduction to Copulas. Springer, New York. MR2197664.
- 50-Omidi, M., Mohammadzadeh, M., and Morid, S., 2010. The Probabilistic Analysis of Drought Severity-Duration in Tehran Province using Copula Functions. *Iranian Journal of Soil and Water Research*, 41(1), 256745 [DOR: 20.1001.1.2008479.1389.41.1.10.9](https://doi.org/10.1007/s13201-022-01589-4). [In Persian].
- 51-Park, J.Y., Yoo, J.Y., Lee, M., and Kim, T.W., 2012. Assessment of drought risk in Korea: Focused on data-based drought risk map. *KSCE Journal of Civil and Environmental Engineering Research*, 32(4B), pp. 203-211.
- 52-Patton, A.J. 2012. Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, 47(2), pp. 527-556.
- 53-Paul, R., Brindha, K., Gowrisankar, G., Tan, M.L., and Singh, M.K., 2019. Identification of hydrogeochemical processes controlling groundwater quality in Tripura, Northeast India using evaluation indices, GIS, and multivariate statistical methods. *Environmental Earth Sciences*, 78, pp. 1-16. <https://doi.org/10.1007/s12665-019-8479-6>
- 54-Radfar, S., Galiatsatou, P., and Wahl, T., 2023. Application of nonstationary extreme value analysis in the coastal environment—A systematic literature review. *Weather and Climate Extremes*, 41, 100575. <https://doi.org/10.1016/j.wace.2023.100575>
- 55-Ramezani, Y., Nazeri Tahroudi, M., De Michele, C., and Mirabbasi, R., 2023a. Application of copula-based and ARCH-based models in storm prediction. *Theoretical and Applied Climatology*, 151(3), pp. 1239-1255. <https://doi.org/10.1007/s00704-022-04333-9>
- 56-Ramezani, Y., Tahroudi, M.N., and Sedighi, M.P. 2023b. Application of vine copulas to estimate dew point temperature. *Atmosfera*, 37, pp. 501-514.
- 57-Raynal-Villasenor, J.A., and Salas, J.D., 1987. Multivariate extreme value distributions in
- 34-Kruskal, W.H., 1958. Ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, 53(284), pp. 814-861. <https://doi.org/10.2307/2281954>
- 35-Kwon, H.H., Kim, J.S., Shin, D.S., and Lee, W.B., 2015. Modeling Groundwater Level Fluctuation Based on Cumulative Effect of Rainfall Through Gaussian-Copulation Framework. *Hydrogeological Sciences Journal*, 60(4), 77284. <https://doi.org/10.22126/arww.2023.7707.1246>
- 36-Lee, T., and Salas, J.D., 2011. Copula-based stochastic simulation of hydrological data applied to Nile River flows. *Hydrology Research*, 42(4), pp. 318-330. <https://doi.org/10.2166/nh.2011.085>
- 37-Liu, Z., Guo, S., Xu, X., Xu, S., and Cheng, J., 2021. Application of Copula functions in hydrology and water resources: a state-of-the-art review. *Advances in Water Science*, 32(1), pp. 148-159. <https://doi.org/10.14042/j.cnki.32.1309.2021.01.015>
- 38-Lojowska, A., Kurowicka, D., Papaefthymiou, G., and Van Der Sluis, L., 2012. Stochastic modeling of power demand due to EVs using copula. *IEEE Transactions on Power Systems*, 27(4), pp. 1960-1968. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2192139>
- 39-Lucca, G., Sanz, J. A., Dimuro, G. P., Bedregal, B., Asiain, M. J., Elkano, M., and Bustince, H., 2017. CC-integrals: Choquet-like copula-based aggregation functions and its application in fuzzy rule-based classification systems. *Knowledge-Based Systems*, 119, pp. 32-43. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2016.12.004>
- 40-Malekpour, A., Sadeghian, N., and Farrokhi, M.J., 2023. Bivariate probabilistic analysis of temporal variations of pore water pressure during consolidation process in structural foundation. *Irrigation and Drainage Structures Engineering Research*, 24(90), pp. 91-113. [doi: 10.22092/idser.2023.363197.1551](https://doi.org/10.22092/idser.2023.363197.1551). [In Persian].
- 41-Mensi, W., Hammoudeh, S., Shahzad, S.J.H., and Shahbaz, M., 2017. Modeling systemic risk and dependence structure between oil and stock markets using a variational mode decomposition-based copula method. *Journal of Banking & Finance*, 75, pp. 258-279.
- 42-Mirabbasi, R., Nazeri Tahroudi, M., Sharifi, A., and Torabi Haghighi, A., 2024. A probabilistic approach for estimating spring discharge facing data scarcity. *Applied Water Science*, 14(2), 12. <https://doi.org/10.1007/s13201-023-02071-5>
- 43-Naghibi, S.A., and Pourghasemi, H.R., 2015. A comparative assessment between three machine learning models and their performance comparison by bivariate and multivariate statistical methods in groundwater potential mapping. *Water Resources Management*, 29, pp. 5217-5236.
- 44-Nasrolahi, A., Nazeri Tahroudi, M., and Sabzevari, Y., (2025). Investigating the probabilistic behavior of reference evapotranspiration using Vine tree sequence. *Applied Water Science*, 15(5), pp. 1-15. <https://doi.org/10.1007/s13201-025-02429-x>

- resources components (Case study: Siminehrood River Basin, Iran). *Water Harvesting Research*, 7(2), pp. 289-300. <https://doi.org/10.22077/jwhr.2024.8508.1160>
- 70-Shiau, J.T., 2006. Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. *Water Resources Management*, 20, pp. 795-815. <https://doi.org/10.1007/s11269-005-9008-9>
- 71-Sklar, A., 1959. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8, pp. 229-231.
- 72-Tahmassebpour, N., Rahmati, O., Noormohamadi, F., and Lee, S., 2016. Spatial analysis of groundwater potential using weights-of-evidence and evidential belief function models and remote sensing. *Arabian Journal of Geosciences*, 9, pp. 1-18. <https://doi.org/10.1007/s12517-015-2166-z>
- 73-Tahroudi, M.N., Ramezani, Y., De Michele, C., and Mirabbasi, R., 2020. Analyzing the conditional behavior of rainfall deficiency and groundwater level deficiency signatures by using copula functions. *Hydrology Research*, 51(6), pp. 1332-1348. <https://doi.org/10.2166/nh.2020.036>
- 74-Tahroudi, M. N., Ramezani, Y., De Michele, C., and Mirabbasi, R., 2024. Wind speed monitoring using entropy theory and a copula-based approach. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 75, 103582. <https://doi.org/10.1016/j.pro bengmech.2024.103582>
- 75-Tao, H., Hameed, M.M., Marhoon, H.A., Zounemat-Kermani, M., Heddami, S., Kim, S., ... and Yaseen, Z.M., 2022. Groundwater level prediction using machine learning models: A comprehensive review. *Neurocomputing*, 489, pp. 271-308. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.03.014>
- 76-Tootoonchi, F., Sadegh, M., Haerter, J.O., Rätty, O., Grabs, T., and Teutschbein, C., 2022. Copulas for hydroclimatic analysis: A practice-oriented overview. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Water*, 9(2), e1579. <https://doi.org/10.1002/wat2.1579>
- 77-Vahidi, M.J., Mirabbasi, R., Khashei-Siuki, A., Tahroudi, M.N., and Jafari, A.M., 2024. Modeling of daily suspended sediment load by trivariate probabilistic model (case study, Allah River Basin, Iran). *Journal of Soils and Sediments*, 24(1), pp. 473-484. <https://doi.org/10.1007/s11368-023-03629-1>
- 78-Vandenberghe, S., Verhoest, N.E.C., Onof, C., and De Baets, B., 2011. A comparative copula-based bivariate frequency analysis of observed and simulated storm events: A case study on Bartlett-Lewis modeled rainfall. *Water Resources Research*, 47(7), W07529, <https://doi.org/10.1029/2009WR008388>
- 79-Wang, X., Xie, H., Guan, H., and Zhou, X., 2007. Different responses of MODIS-derived NDVI to root-zone soil moisture in semi-arid and humid regions. *Journal of Hydrology*, 340, pp. 12-24. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2007.03.022>
- 80-Xie, Z.Q., Ji, T.Y., Li, M.S., and Wu, Q.H., 2017. Quasi-Monte Carlo based probabilistic optimal power flow considering the correlation of wind hydrological analyses. IN: *Water for the Future: Hydrology in Perspective*. IAHS Publication, (164).
- 58-Razmi, A., Mardani-Fard, H. A., Golian, S., and Zahmatkesh, Z., 2022. Time-varying univariate and bivariate frequency analysis of nonstationary extreme sea level for New York City. *Environmental Processes*, 9, 8. <https://doi.org/10.1007/s40710-021-00553-9>
- 59-Sadeghfam, S., Mirahmadi, R., Khatibi, R., Mirabbasi, R., and Nadiri, A.A., 2022. Investigating meteorological/groundwater droughts by copula to study anthropogenic impacts. *Scientific Reports*, 12, 8285. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-11768-7>
- 60-Sadeghian, N., Malekpour Estalaki, A. and Calamak, M., 2024. Probabilistic internal erosion analysis in stratified and unstratified foundations of embankment dams using copulas. *Natural Hazards*, 120, pp. 12989-13007. <https://doi.org/10.1007/s11069-024-06722-x>
- 61-Salvadori, G., and De Michele, C., 2004. Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events. *Water Resources Research*, 40(12). <https://doi.org/10.1029/2004WR003133>
- 62-Salvadori, G., and De Michele, C., 2006. Statistical characterization of temporal structure of storms. *Advances in Water Resources*, 29(6), pp. 827-842.
- 63-Salvadori, G., De Michele, C., Kottegoda, N. T., and Rosso, R., 2007. *Extremes in nature: an approach using copulas* (Vol. 56). Springer Science & Business Media.
- 64-Serinaldi, F., 2009a. Copula-based mixed models for bivariate rainfall data: an empirical study in regression perspective. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 23, pp. 677-693. <https://doi.org/10.1007/s00477-008-0249-z>
- 65-Serinaldi, F., 2009b. A multisite daily rainfall generator driven by bivariate copula-based mixed distributions. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 114(D10). <https://doi.org/10.1029/2008JD011258>
- 66-Serinaldi, F., Bonaccorso, B., Cancelliere, A., and Grimaldi, S., 2009. Probabilistic characterization of drought properties through copulas. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, 34(10-12), pp. 596-605. <https://doi.org/10.1016/j.pce.2008.09.004>
- 67-Serinaldi, F., and Grimaldi, S., 2007. Fully nested 3-Copula: procedure and application on hydrological data. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), pp. 420-430. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(2007\)12:4\(420\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(420))
- 68-Shafaie, M., Fakheri-Fard, A., Dinpashoh, Y., Mirabbasi, R., and De Michele, C., 2017. Modeling flood event characteristics using D-vine structures. *Theoretical and Applied Climatology*, 130(3-4), pp. 713-724. <https://doi.org/10.1007/s00704-016-1911-x>
- 69-Sharifan, F., Ramezani, Y., Amirabadizadeh, M., and De Michele, C., 2024. Selection of the best copula function in bivariate analysis of water

Environment, 10(4), pp. 5173-5188.
<https://doi.org/10.1007/s40808-024-02056-6>

- speeds using copula function. *IEEE Transactions on Power Systems*, 33(2), pp. 2239-2247.
<https://doi.org/10.1109/TPWRS.2017.2737580>
- 81-Yadav, B., Gupta, P.K., Patidar, N., and Himanshu, S.K., 2020. Ensemble modelling framework for groundwater level prediction in urban areas of India. *Science of the Total Environment*, 712, 135539.
<https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2019.135539>
- 82-Yang, R., Wu, S., Gao, X., Wu, X., Zhang, C., Wang, C., ... and Zhao, Y., 2021. An accuracy-improved flood risk and ecological risk assessment in an interconnected river-lake system based on a copula-coupled hydrodynamic risk assessment model. *Journal of Hydrology*, 603, 127042.
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.127042>
- 83-Yoo, C., Na, W., Chang, K. H., and Song, S.K., 2024. Ecohydrological investigation of cloud seeding effect on vegetation activity in the Boryeong Dam Basin, South Korea. *Science of The Total Environment*, 173598.
<https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2024.173598>
- 84-Yue, S., Ouarda, T. B., and Bobée, B., 2001. A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. *Journal of Hydrology*, 246(1-4), pp. 1-18.
[https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(01\)00374-2](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(01)00374-2)
- 85-Zavareh, M. M., Mahjouri, N., Rahimzadegan, M., and Rahimpour, M., 2023. A drought index based on groundwater quantity and quality: Application of multivariate copula analysis. *Journal of Cleaner Production*, 417, 137959.
<https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2023.137959>
- 86-Zhang, J., Ding, Z., and You, J., 2014. The joint probability distribution of runoff and sediment and its change characteristics with multi-time scales. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 62(3), pp. 218-225.
<https://doi.org/10.2478/johh-2014-0024>
- 87-Zhang, L., and Singh, V.P., 2007a. Bivariate rainfall frequency distributions using Archimedean copulas. *Journal of Hydrology*, 332(1-2), pp. 93-109.
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2006.06.033>
- 88-Zhang, L., and Singh, V.P., 2007b. Trivariate flood frequency analysis using the Gumbel-Hougaard copula. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), pp. 431-439. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(2007\)12:4\(431\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(431))
- 89-Zhang, L.M., Deng, Q.W., Xia, Y.F., and Liu, W.L., 2018. Evaluating The Correlation Between Nitrate Concentrations from Different Sources Using Archimedean Co-Pultltion Techniques. *Journal of Water Resource Economics*, 24(1), pp. 45-57.
- 90-Zhang, Q., Li, J., Singh, V.P., and Xu, C.Y., 2013. Copula-based spatio-temporal patterns of precipitation extremes in China. *International Journal of Climatology*, 33(5), pp. 1140-1152.
<https://doi.org/10.1002/joc.3499>
- 91-Zhang, Q., Mi, S., Wen, Z., and Wang, Z., 2024. Spatial modeling under small sample sizes in unconventional sweet-spots mapping using spatial copula. *Modeling Earth Systems and*