

## حل تحلیلی نوسانات آب‌های زیرزمینی ناشی از جزر و مد در یک سیستم آبخوان ناهمگن تحت تأثیر دو جزر و مد

داوود محققیان<sup>۱</sup> و مهدی اسدی آقبلاغی<sup>۲\*</sup>

### چکیده

در این مقاله، یک راه حل تحلیلی برای نوسانات آب‌های زیرزمینی ناشی از جزر و مد در یک سیستم آبخوان ساحلی ناهمگن با طول محدود توسعه داده شد. این سیستم آبخوان شامل یک آبخوان آزاد در بالا یک آبخوان نیمه‌محصور در پایین و یک لایه نیمه‌تراوا بین آن‌ها بوده و تمام لایه‌ها به‌صورت ناهمگن در نظر گرفته شدند. پارامترهای بدون بعدی برای بررسی نتایج معرفی شدند که به‌عنوان مثال  $L_m = L_1/L_2$  که در آن  $L_1$  و  $L_2$ ، به‌ترتیب نشت در لایه نیمه‌تراوای سمت چپ و راست هستند. نتایج نشان داد که دامنه نوسانات در آبخوان آزاد با افزایش نشت افزایش پیدا می‌کند، اما نوسانات در آبخوان نیمه‌محصور با افزایش نشت کاهش پیدا می‌کند. وقتی طول آبخوان سمت چپ و راست برابر با ۱۰۰ متر باشند، برای  $L_m = 0.25$ ،  $L_m = 1$  و  $L_m = 5$  کمترین دامنه نوسانات به‌ترتیب در  $x = 100$  متر،  $x = 120$  متر و  $x = 90$  متر، اتفاق می‌افتد. به علاوه، افزایش ضریب ذخیره در آبخوان آزاد سبب کاهش نوسانات سطح آب می‌شود. در صورتی که، نوسانات آب زیرزمینی در آبخوان محصور با تغییر ضریب ذخیره به طور تقریبی ثابت می‌ماند. همچنین، افزایش ضریب انتقال در آبخوان‌های آزاد و نیمه‌محصور سبب افزایش نوسانات سطح آب شده است.

**واژه‌های کلیدی:** آبخوان آزاد، آبخوان نیمه‌محصور، اندرکنش آب دریا و آب زیرزمینی، جریان یک بعدی، لایه نیمه‌تراوا، نشت.

**ارجاع:** محققیان د. و اسدی آقبلاغی م. ۱۳۹۴. حل تحلیلی نوسانات آب‌های زیرزمینی ناشی از جزر و مد در یک سیستم آبخوان ناهمگن تحت تأثیر دو جزر و مد. مجله پژوهش آب ایران. ۱۹: ۱۴۹-۱۵۸.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی، گروه مهندسی آب دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد.

۲- استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد.

\* نویسنده مسئول: [mahdi.asadi.a@gmail.com](mailto:mahdi.asadi.a@gmail.com)

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۱۱/۲۵

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۴/۳۰

## مقدمه

بررسی اثر نوسانات جزر و مد دریا در آبخوان ساحلی موضوعی است که مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران از سال ۱۹۵۰ به بعد بوده است. پژوهش‌ها روی این آبخوان‌ها در زمینه‌های مختلف انجام شده است. این پژوهش‌ها شامل هیدرولوژی ساحلی، مهندسی سواحل، مشکلات زیست‌محیطی، برآورد پارامترهای آبخوان ساحلی، حفظ سازه‌های دریایی و نفوذ آب شور به آب زیرزمینی است (فارل، ۱۹۹۴). از دیگر موضوعات مهم که مورد توجه پژوهش‌گران است نوسانات سطح آب زیرزمینی در آبخوان‌های ساحلی است.

بررسی‌های که در این زمینه انجام شده‌است را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد؛ بررسی‌های صحرایی، بررسی‌های عددی (عطایی آشتیانی و همکاران، ۱۹۹۹) و بررسی‌های تحلیلی (جنگ و همکاران، ۲۰۰۲ و لی و بری، ۲۰۰۲). گروهی از پژوهش‌گران بررسی‌های تحلیلی روی آبخوان‌های ساحلی تک‌لایه انجام داده‌اند. در این بررسی‌ها، اثر نوسانات جزر و مد روی یک آبخوان آزاد بررسی شده است. از مواردی که روی آبخوان‌های تک‌لایه کار شده می‌توان به بررسی‌های فیلیپ (۱۹۷۳)، پارلانج و همکاران (۱۹۸۴) و سانگ و همکاران (۲۰۰۷) اشاره کرد.

به‌عنوان مثال پارلانج و همکاران (۱۹۸۴) یک راه حل نیمه‌تحلیلی با در نظر گرفتن معادله غیرخطی بوسینسک برای آبخوان آزاد با روش اغتشاش<sup>۱</sup> برای جریان آب زیرزمینی در آبخوان ساحلی تک‌لایه آزاد که تحت تأثیر سیستم جزر و مدی است ارائه کردند. آن‌ها نتایج بررسی خود را با دو مدل آزمایشگاهی مقایسه کردند که نتایج مدل تحلیلی هماهنگی خوبی با دو بررسی آزمایشگاهی داشت.

سانگ و همکاران (۲۰۰۷) یک راه حل تحلیلی جدید با استفاده از روش اغتشاش برای حل معادله غیرخطی بوسینسک برای آبخوان‌های تک‌لایه آزاد ساحلی تحت جزر و مد ارائه کردند. آن‌ها یک پارامتر اغتشاش تعریف کردند که همیشه کوچک‌تر از یک است. بنابراین معادله به دست آمده همیشه پایدار است. همچنین، آن‌ها با استفاده از تقریب مرتبه دو و سه به راه‌حلی دقیق‌تر از راه حل پارلانج و همکاران (۱۹۸۴) دست پیدا کردند.

بررسی‌های میدانی نشان داده است که بیشتر آبخوان‌های ساحلی به‌صورت چندلایه هستند (جنگ و همکاران، ۲۰۰۲ و لی و جایو، ۲۰۰۳). این آبخوان‌ها به‌طور معمول از یک آبخوان آزاد در بالا و یک آبخوان نیمه‌محصور در پایین و یک لایه نیمه‌تراوا در بین آن‌ها، تشکیل شده‌اند که این آبخوان‌ها در اصطلاح به سیستم آبخوان ساحلی موسومند. پژوهش‌گران مختلفی اثر جزر و مد را روی نوسانات سطح آب زیرزمینی در این آبخوان‌ها بررسی کرده‌اند که در زیر به‌طور خلاصه به تعدادی از این پژوهش‌ها اشاره می‌شود.

جنگ و همکاران (۲۰۰۲) برای نوسانات ناشی از جزر و مد در یک سیستم آبخوان نشتی ساحلی یک راه حل تحلیلی ارائه دادند. آن‌ها اثر نوسانات سطح آب در هر دو آبخوان آزاد و نیمه‌محصور را در نظر گرفتند. برای آبخوان آزاد از معادله خطی شده بوسینسک استفاده کردند. این راه حل تحلیلی با روش جداسازی متغیرها به دست آمد. آن‌ها برای بررسی اثر پارامترهای آبخوان روی نوسانات سطح آب زیرزمینی از مثال‌های عددی استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که در یک شرایط مشخص، تراوش از آبخوان نیمه‌محصور به آبخوان آزاد و بالعکس، می‌تواند به صورت قابل‌توجهی بر نوسانات سطح آب زیرزمینی اثر بگذارد.

چوانگ و همکاران (۲۰۱۲) یک راه حل تحلیلی برای یک سیستم آبخوان نشتی ارائه دادند. آن‌ها در این بررسی، معادله بوسینسک را برای آبخوان آزاد در نظر گرفتند و از روش اغتشاش برای حل مسئله استفاده کردند. میانگین نوسانات بار آبی پیش‌بینی شده روش آن‌ها بزرگ‌تر از میانگین نوسانات برای حالتی که معادله بوسینسک خطی شده (مانند راه حل جنگ و همکاران، ۲۰۰۲) استفاده شده است، می‌باشد. این اختلاف برای وقتی که نسبت دامنه جزر و مدی به ضخامت آبخوان آزاد بزرگ باشد، مهم‌تر می‌شود.

اسدی آق‌بلاغی و همکاران (۲۰۱۲) یک راه حل تحلیلی برای نوسانات آب زیرزمینی در یک سیستم آبخوان نشتی شیب‌دار ارائه کردند. در این حل تحلیلی اثر زاویه کف، تراوش و پارامترهای آبخوان را روی بار آبی آبخوان‌های آزاد و نیمه‌محصور بررسی شد. نتایج پژوهش یاد شده نشان داد که اثر زاویه کف بر نوسانات آب زیرزمینی و زمان تأخیر در آبخوان آزاد قابل‌توجه است و اگر تراوش

نشده است. پس، در این مقاله نوسانات ایجاد شده با جزر و مد در یک سیستم آبخوان ساحلی ناهمگن با طول محدود به صورت تحلیلی بررسی می‌شود. این سیستم آبخوان ساحلی شامل یک آبخوان آزاد در بالا، یک آبخوان نیمه‌محصور در پایین و یک لایه نیمه‌تراوا بین آن‌ها است و تمامی لایه‌ها به صورت ناهمگن در نظر گرفته شده‌اند. این سیستم آبخوان از هر دو طرف تحت تأثیر جزر و مد دریا است. با در دست داشتن راه حل تحلیلی، اثر پارامترهای هیدرولیکی مانند ضریب ذخیره، ضریب نشت و ضریب انتقال روی نوسانات جریان آب زیرزمینی بررسی می‌شود.

### مواد و روش‌ها

شکل ۱، سیستم آبخوان ناهمگن ساحلی را نمایش می‌دهد که از دو طرف به وسیله دریا احاطه شده است. این سیستم شامل یک آبخوان آزاد در بالا و یک آبخوان نیمه‌محصور در پایین و یک لایه نیمه‌تراوا در بین آن‌ها است. مبدأ مختصات در فصل مشترک بین آبخوان و ساحل سمت چپ است. آبخوان مورد نظر در جهت  $Y$  نامحدود و در جهت  $X$  محدود است. در  $X=I_1$  یک مرز ناهمگنی موجود می‌باشد. به عبارت دیگر مواد تمامی آبخوان‌ها در این مرز تغییر می‌کند.  $h_{11}$  و  $h_{21}$  به ترتیب بار آبی در آبخوان آزاد و آبخوان نیمه‌محصور در ساحل چپ،  $h_{12}$  و  $h_{22}$  به ترتیب بار آبی در آبخوان آزاد و آبخوان نیمه‌محصور در ساحل راست،  $S_{11}$  و  $T_{11}$  به ترتیب ضریب ذخیره و ضریب انتقال آبخوان آزاد در ساحل چپ،  $S_{21}$  و  $T_{21}$  به ترتیب ضریب ذخیره و ضریب انتقال آبخوان محصور در ساحل چپ،  $S_{12}$  و  $T_{12}$  به ترتیب ضریب ذخیره و ضریب انتقال در آبخوان آزاد ساحل راست،  $S_{22}$  و  $T_{22}$  به ترتیب ضریب ذخیره و ضریب انتقال در آبخوان نیمه‌محصور ساحل راست،  $L_1$  مقدار نشت لایه نیمه‌تراوا در ساحل چپ،  $L_2$  مقدار نشت در لایه نیمه‌تراوا در ساحل راست،  $h_m$  متوسط تراز آب دریا می‌باشد و  $A$  و  $\omega$  به ترتیب دامنه و سرعت زاویه‌ای جزر و مد هستند. وقتی که نوسانات جزر و مد نسبت به ضخامت آبخوان آزاد کم باشد می‌توان از معادله بوسینسک خطی شده برای این آبخوان استفاده کرد (جنگ و همکاران، ۲۰۰۲ و چوانگ و یه، ۲۰۰۷). بنابراین می‌توان معادلات حاکم برای سیستم آبخوان به شکل زیر نوشت (بیر، ۱۹۷۹):

زیاد باشد، در آبخوان نیمه‌محصور قابل توجه نیست. همچنین، اثر توأم پارامترهای آبخوان و زاویه کف بر نوسانات آب زیرزمینی و زمان تأخیر در بررسی آن‌ها بحث و بررسی شد.

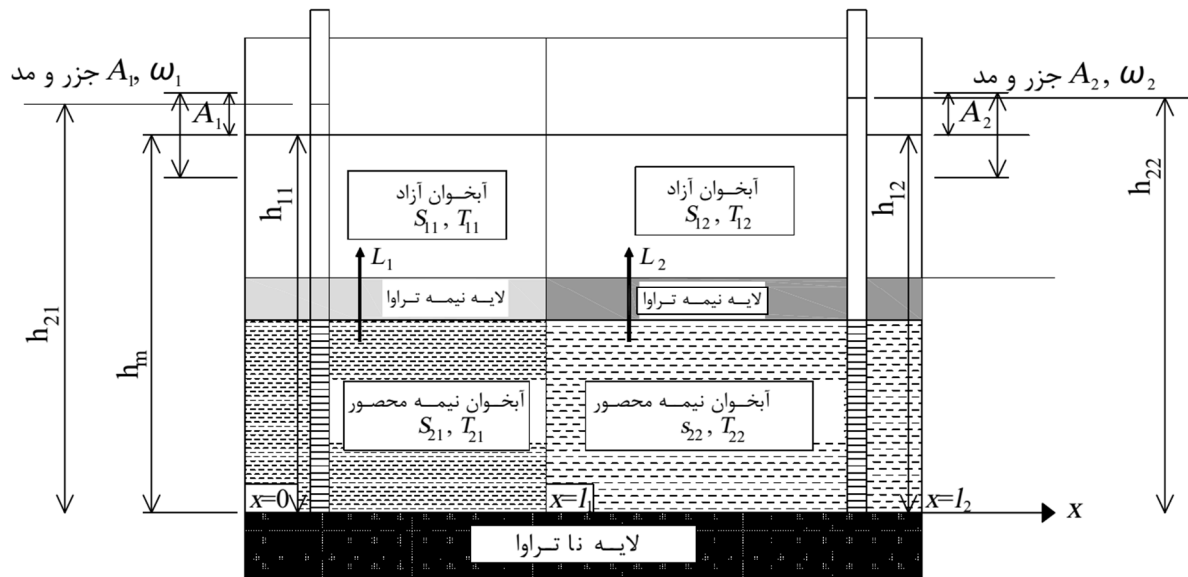
بعضی از آبخوان‌ها دارای طول محدود هستند. در این حالت آبخوان از دو سمت تحت تأثیر جزر و مد قرار می‌گیرد. برخی از پژوهش‌گران راه حل‌های تحلیلی برای این گونه آبخوان‌ها ارائه کرده‌اند. به عنوان مثال روتزول و همکاران (۲۰۰۸) یک راه حل تحلیلی یک بعدی برای معادله جریان آب زیرزمینی در یک آبخوان که از هر دو طرف تحت تأثیر جزر و مد قرار داشت ارائه دادند. آن‌ها نتایج روش تحلیلی خودشان را با مشاهداتی که در آبخوانی در موآی<sup>۱</sup> انجام شده بود مقایسه کردند. نتایج نشان داد که در نظر گرفتن اثر جزر و مد در دو طرف جزیره، نسبت به حالتی که اثر جزر و مد در یک طرف در نظر گرفته شود، هماهنگی بهتری با نتایج مشاهده شده دارد.

هوانگ و همکاران (۲۰۱۲) به توسعه یک مدل ریاضی عمومی برای به دست آوردن بار آبی در آبخوان یک جزیره باریک و طولانی تحت اثر دو جزر و مد پرداختند. حل این معادله با روش مستقیم فوریه و تبدیل فوریه سینوسی محدود انجام شد. اگر عرض جزیره بزرگ باشد نتایج به دست آمده به طور تقریبی مشابه نتایج حالتی است که آبخوان تحت اثر یک جزر و مد است. حضور لایه نیمه‌تراوا بین آبخوان آزاد و نیمه‌محصور جریان عمودی کاملی را در آبخوان نیمه‌محصور ایجاد می‌کند. حتی اگر نفوذپذیری لایه نیمه‌تراوا نیز کم باشد میزان این جریان قائم قابل توجه خواهد بود. در نظر نگرفتن این جریان قائم سبب می‌شود که بار آبی در آبخوان نیمه‌محصور بیشتر از مقدار واقعی تخمین زده شود. ضریب میرایی موج و زمان تأخیر به دست آمده از راه حل ایشان هماهنگی خوبی با داده‌های اندازه‌گیری شده در ۵۷ روز در جزیره گاردن<sup>۲</sup> استرالیا را داشت (هوانگ و همکاران، ۲۰۱۲).

بر اساس دانش نویسندگان مقاله، تاکنون بررسی‌ای برای تعیین نوسانات آب‌های زیرزمینی ناشی از جزر و مد در یک سیستم آبخوان ساحلی ناهمگن با طول محدود ارائه

1- moui

2- Garden Island



شکل ۱- آبخوان ناهمگن دو لایه که از دو طرف به وسیله دریا احاطه شده است.

در مرز آبخوان و دریا بار آبی برابر با نوسانات جزر و مد است. بنابراین:

$$x=0 \text{ در}$$

$$h_{21} = h_{11} = h_m + A \cos(\omega t) \quad (9)$$

$$\text{و در } x=l_1+l_2$$

$$h_{12} = h_{22} = h_m + A \cos(\omega t) \quad (10)$$

در مرز ناهمگنی، بار آبی در آبخوان‌های سمت چپ و راست با هم برابر است و علاوه بر آن میزان شار ورودی یا خروجی جریان از آبخوان سمت چپ به راست و بالعکس باید برابر باشد. بنابراین در  $x=l_1$ :

$$h_{11} = h_{12}, \quad h_{21} = h_{22} \quad (11)$$

$$T_{11} \frac{\partial h_{11}}{\partial x} = T_{12} \frac{\partial h_{12}}{\partial x} \quad (12)$$

$$T_{21} \frac{\partial h_{21}}{\partial x} = T_{22} \frac{\partial h_{22}}{\partial x} \quad (13)$$

### راه حل تحلیلی

در این قسمت با توجه به معادلات حاکم و شرایط مرزی موجود، یک راه حل تحلیلی برای مسئله ارائه می‌شود. با

استفاده از معادله (۵) مقدار  $h_{21}$  به دست خواهد آمد:

$$h_{21} = \frac{s_{11}}{L_1} \frac{\partial h_{11}}{\partial t} - \frac{T_{11}}{L_1} \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} + h_{11} \quad (14)$$

$h_{21}$  حاصل از معادله (۱۴) در معادله (۶) جایگذاری می‌شود:

$$S_{11} \frac{\partial h_{11}}{\partial t} = T_{11} \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} + N_1 \quad 0 < x < l_1 \quad (1)$$

$$S_{21} \frac{\partial h_{21}}{\partial t} = T_{21} \frac{\partial^2 h_{21}}{\partial x^2} - N_1 \quad 0 < x < l_1 \quad (2)$$

$$S_{12} \frac{\partial h_{12}}{\partial t} = T_{12} \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2} + N_2 \quad l_1 < x < l_1 + l_2 \quad (3)$$

$$S_{22} \frac{\partial h_{22}}{\partial t} = T_{22} \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^2} - N_2 \quad l_1 < x < l_1 + l_2 \quad (4)$$

که در آن‌ها  $N_1$  و  $N_2$  میزان تغذیه یا تخلیه در واحد سطح آبخوان هستند. در این بررسی تغذیه از سطح آبخوان آزاد در نظر گرفته نشده است، پس در صورتی که تراز آب زیرزمینی در آبخوان آزاد بالاتر از تراز آب در آبخوان نیمه‌محصور باشد آب از آبخوان آزاد به آبخوان نیمه‌محصور تراوش می‌کند و بالعکس. بنابراین مقدار  $N_1$  و  $N_2$  به اختلاف بار آبی در آبخوان آزاد و نیمه‌محصور مرتبط است؛  $N_1 = L_1(h_{21} - h_{11})$  و  $N_2 = L_2(h_{22} - h_{12})$ . پس معادلات (۱) تا (۴) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S_{11} \frac{\partial h_{11}}{\partial t} = T_{11} \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} + L_1(h_{21} - h_{11}) \quad 0 < x < l_1 \quad (5)$$

$$S_{21} \frac{\partial h_{21}}{\partial t} = T_{21} \frac{\partial^2 h_{21}}{\partial x^2} + L_1(h_{11} - h_{21}) \quad 0 < x < l_1 \quad (6)$$

$$S_{12} \frac{\partial h_{12}}{\partial t} = T_{12} \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2} + L_2(h_{22} - h_{12}) \quad l_1 < x < l_1 + l_2 \quad (7)$$

$$S_{22} \frac{\partial h_{22}}{\partial t} = T_{22} \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^2} + L_2(h_{12} - h_{22}) \quad l_1 < x < l_1 + l_2 \quad (8)$$

$$\frac{s_{22} \cdot s_{12}}{L_2} \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial t^2} - \frac{T_{12} \cdot T_{22}}{L_2} \frac{\partial^3 h_{12}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{s_{12} \cdot \partial h_{12}}{\partial t} - \frac{T_{22} \cdot s_{12}}{L_2} \frac{\partial^3 h_{12}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{T_{12} \cdot T_{22}}{L_2} \frac{\partial^4 h_{12}}{\partial x^4} - \frac{T_{22} \cdot \partial^2 h_{12}}{\partial x^2} \quad (27)$$

$$- L_2 \cdot h_{12} + s_{12} \frac{\partial h_{12}}{\partial t} - T_{12} \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2} + L_2 \cdot h_{12} = 0$$

مقدار  $h_{12}$  و  $h_{22}$  به صورت زیر فرض می‌شوند:

$$h_{12}(x,t) = h_m + \text{Re}(H_{12} \cdot e^{-i\omega t}) \quad (28)$$

$$h_{22}(x,t) = h_m + \text{Re}(H_{22} \cdot e^{-i\omega t}) \quad (29)$$

$H_{12}$ ،  $H_{22}$  توابعی از  $x$  می‌باشند (که بعد مشخص خواهند شد).

با جای‌گذاری معادله (۲۸) در معادله (۲۷) معادله (۳۰) حاصل می‌شود:

$$\frac{T_{12} \cdot T_{22}}{L_2} \frac{\partial^4 H_{12}}{\partial x^4} - \left( \frac{s_{22} \cdot T_{12}}{L_2} + \frac{T_{22} \cdot s_{12}}{L_2} \right) \frac{\partial^3 H_{12}}{\partial x^2 \partial t} - (T_{12} + T_{22}) \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial x^2} + \frac{s_{12} \cdot s_{22}}{L_2} \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial t^2} \quad (30)$$

$$+ (s_{12} + s_{22}) \frac{\partial H_{12}}{\partial t} = 0$$

با حل این رابطه جواب زیر حاصل خواهد شد:

$$H_{12}(x) = a_5 e^{\lambda_5 x} + a_6 e^{\lambda_6 x} + a_7 e^{\lambda_7 x} + a_8 e^{\lambda_8 x} \quad (31)$$

که در آن:

$$\lambda_5 = \sqrt{\frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})} \quad (32)$$

$$\lambda_6 = \sqrt{\frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c})} \quad (33)$$

$$\lambda_7 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})} \quad (34)$$

$$\lambda_8 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c})} \quad (35)$$

$$b = i\omega \left( \frac{s_{22}}{T_{22}} + \frac{s_{12}}{T_{12}} \right) - L_2 \left( \frac{1}{T_{22}} + \frac{1}{T_{12}} \right) \quad (36)$$

$$c = -\frac{\omega^2 s_{12} s_{22}}{T_{12} T_{22}} - \frac{i\omega L_2}{T_{12} T_{22}} (s_{12} + s_{22}) \quad (37)$$

برای پیدا کردن ضریب‌های ثابت  $a_1$  تا  $a_8$  به شکل زیر عمل می‌شود، با اعمال شرط مرزی (۹)، معادلات (۳۸) و (۳۹) حاصل می‌شوند.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = A \quad (38)$$

$$\frac{s_{21} \cdot s_{11}}{L_1} \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2} - \frac{T_{21} \cdot T_{11}}{L_1} \frac{\partial^3 h_{11}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{s_{11} \cdot \partial h_{11}}{\partial t} - \frac{T_{21} \cdot s_{11}}{L_1} \frac{\partial^3 h_{11}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{T_{21} \cdot T_{11}}{L_1} \frac{\partial^4 h_{11}}{\partial x^4} - \frac{T_{21} \cdot \partial^2 h_{11}}{\partial x^2} \quad (15)$$

$$- L_1 \cdot h_{11} + s_{11} \frac{\partial h_{11}}{\partial t} - T_{11} \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} + L_1 \cdot h_{11} = 0$$

$h_{21}$  و  $h_{11}$  به صورت زیر در نظر گرفته شد:

$$h_{11}(x,t) = h_m + \text{Re}(H_{11} \cdot e^{-i\omega t}) \quad (16)$$

$$h_{21}(x,t) = h_m + \text{Re}(H_{21} \cdot e^{-i\omega t}) \quad (17)$$

که  $\text{Re}$  بیانگر جزء حقیقی عبارت داخل پرانتز است و  $H_{11}$  و  $H_{21}$  توابعی از  $x$  هستند (که بعد مشخص خواهند شد).

از معادله (۱۶) مقدار  $h_{11}$  در معادله (۷) جای‌گذاری شد:

$$\frac{T_{21} \cdot T_{11}}{L_1} \frac{\partial^4 H_{11}}{\partial x^4} - \left( \frac{s_{21} \cdot T_{11}}{L_1} + \frac{T_{21} \cdot s_{11}}{L_1} \right) \frac{\partial^3 H_{11}}{\partial x^2 \partial t} - (T_{11} + T_{21}) \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial x^2} + \frac{s_{21} \cdot s_{11}}{L_1} \frac{\partial^2 H_{11}}{\partial t^2} \quad (18)$$

$$+ (s_{11} + s_{21}) \frac{\partial H_{11}}{\partial t} = 0$$

جواب این معادله به صورت زیر است:

$$H_{11}(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + a_3 e^{\lambda_3 x} + a_4 e^{\lambda_4 x} \quad (19)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})} \quad (20)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c})} \quad (21)$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})} \quad (22)$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c})} \quad (23)$$

$$b = i\omega \left( \frac{s_{11}}{T_{11}} + \frac{s_{21}}{T_{21}} \right) - L_1 \left( \frac{1}{T_{21}} + \frac{1}{T_{11}} \right) \quad (24)$$

$$c = -\frac{\omega^2 s_{11} s_{21}}{T_{11} T_{21}} - \frac{i\omega L_1}{T_{11} T_{21}} (s_{11} + s_{21}) \quad (25)$$

مقدار  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $a_3$  و  $a_4$  با استفاده از شرایط مرزی به دست می‌آیند (که بعد توضیح داده خواهند شد). مشابه را برای آبخوان سمت راست انجام می‌شوند. ابتدا از معادله (۷) مقدار  $h_{22}$  به دست آورده شد:

$$h_{22} = \frac{s_{12}}{L_2} \frac{\partial h_{12}}{\partial t} - \frac{T_{12}}{L_2} \frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x^2} + h_{12} \quad (26)$$

از معادله (۲۶)  $h_{22}$  در معادله (۸) جای‌گذاری شد:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + [-T_{11}(a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2 + a_3\lambda_3^2 + a_4\lambda_4^2) - i(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)s_{11}\omega] / L_1 = A \quad (39)$$

با اعمال شرط مرزی (۱۰):

$$e^{(h_1+h_2)\lambda_5} a_5 + e^{(h_1+h_2)\lambda_6} a_6 + e^{(h_1+h_2)\lambda_7} a_7 + e^{(h_1+h_2)\lambda_8} a_8 = A \quad (40)$$

$$e^{(h_1+h_2)\lambda_5} a_5 + e^{(h_1+h_2)\lambda_6} a_6 + e^{(h_1+h_2)\lambda_7} a_7 + e^{(h_1+h_2)\lambda_8} a_8 - [T_{12}(e^{(h_1+h_2)\lambda_5} a_5 \lambda_5^2 + e^{(h_1+h_2)\lambda_6} a_6 \lambda_6^2 + e^{(h_1+h_2)\lambda_7} a_7 \lambda_7^2 + e^{(h_1+h_2)\lambda_8} a_8 \lambda_8^2)] / L_2 - i(e^{(h_1+h_2)\lambda_5} a_5 + e^{(h_1+h_2)\lambda_6} a_6 + e^{(h_1+h_2)\lambda_7} a_7 + e^{(h_1+h_2)\lambda_8} a_8) s_{12}\omega / L_2 = A \quad (41)$$

و با اعمال شرط مرزی (۱۱)، (۱۲) و (۱۳):

$$a_1 e^{h_1\lambda_1} + a_2 e^{h_2\lambda_2} + a_3 e^{h_3\lambda_3} + a_4 e^{h_4\lambda_4} - a_5 e^{h_5\lambda_5} - a_6 e^{h_6\lambda_6} - a_7 e^{h_7\lambda_7} - a_8 e^{h_8\lambda_8} = 0 \quad (42)$$

$$T_{12}(a_5 e^{h_5\lambda_5} \lambda_5 + a_6 e^{h_6\lambda_6} \lambda_6 + a_7 e^{h_7\lambda_7} \lambda_7 + a_8 e^{h_8\lambda_8} \lambda_8) + T_{11}(a_1 e^{h_1\lambda_1} \lambda_1 + a_2 e^{h_2\lambda_2} \lambda_2 + a_3 e^{h_3\lambda_3} \lambda_3 + a_4 e^{h_4\lambda_4} \lambda_4) = 0 \quad (43)$$

$$a_1 e^{h_1\lambda_1} + a_2 e^{h_2\lambda_2} + a_3 e^{h_3\lambda_3} + a_4 e^{h_4\lambda_4} - a_5 e^{h_5\lambda_5} - a_6 e^{h_6\lambda_6} - a_7 e^{h_7\lambda_7} - a_8 e^{h_8\lambda_8} - T_{11}(a_1 e^{h_1\lambda_1} \lambda_1^2 + a_2 e^{h_2\lambda_2} \lambda_2^2 + a_3 e^{h_3\lambda_3} \lambda_3^2 + a_4 e^{h_4\lambda_4} \lambda_4^2) / L_1 - i(a_1 e^{h_1\lambda_1} + a_2 e^{h_2\lambda_2} + a_3 e^{h_3\lambda_3} + a_4 e^{h_4\lambda_4}) s_{11}\omega / L_1 - T_{12}(a_5 e^{h_5\lambda_5} \lambda_5^2 + a_6 e^{h_6\lambda_6} \lambda_6^2 + a_7 e^{h_7\lambda_7} \lambda_7^2 + a_8 e^{h_8\lambda_8} \lambda_8^2) / L_2 - i(a_5 e^{h_5\lambda_5} + a_6 e^{h_6\lambda_6} + a_7 e^{h_7\lambda_7} + a_8 e^{h_8\lambda_8}) s_{12}\omega / L_2 = 0 \quad (44)$$

$$- T_{22}(a_5 e^{h_5\lambda_5} \lambda_5 + a_6 e^{h_6\lambda_6} \lambda_6 + a_7 e^{h_7\lambda_7} \lambda_7 + a_8 e^{h_8\lambda_8} \lambda_8) + [-T_{12}(a_5 e^{h_5\lambda_5} \lambda_5^3 + a_6 e^{h_6\lambda_6} \lambda_6^3 + a_7 e^{h_7\lambda_7} \lambda_7^3 + a_8 e^{h_8\lambda_8} \lambda_8^3) - i(a_5 e^{h_5\lambda_5} \lambda_5 + a_6 e^{h_6\lambda_6} \lambda_6 + a_7 e^{h_7\lambda_7} \lambda_7 + a_8 e^{h_8\lambda_8} \lambda_8) s_{12}\omega] / L_2 + T_{21}(a_1 e^{h_1\lambda_1} \lambda_1 + a_2 e^{h_2\lambda_2} \lambda_2 + a_3 e^{h_3\lambda_3} \lambda_3 + a_4 e^{h_4\lambda_4} \lambda_4) + [-T_{11}(a_1 e^{h_1\lambda_1} \lambda_1^3 + a_2 e^{h_2\lambda_2} \lambda_2^3 + a_3 e^{h_3\lambda_3} \lambda_3^3 + a_4 e^{h_4\lambda_4} \lambda_4^3) - i(a_1 e^{h_1\lambda_1} \lambda_1 + a_2 e^{h_2\lambda_2} \lambda_2 + a_3 e^{h_3\lambda_3} \lambda_3 + a_4 e^{h_4\lambda_4} \lambda_4) s_{11}\omega] / L_1 = 0 \quad (45)$$

$$\alpha_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1})}$$

$$\alpha_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1})}$$

$$\alpha_5 = \sqrt{\frac{1}{2}(-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_2})}$$

$$\alpha_6 = \sqrt{\frac{1}{2}(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4c_2})}$$

$$\alpha_7 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_2})}$$

$$\alpha_8 = -\sqrt{\frac{1}{2}(-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4c_2})}$$

$$b_1 = i\omega\left(\frac{s_{11}}{T_{11}} + \frac{s_{21}}{T_{21}}\right) - L_1\left(\frac{1}{T_{21}} + \frac{1}{T_{11}}\right) \quad (48)$$

اکنون با حل هشت معادله بالا می‌توان مجهولات  $a_1$  تا  $a_8$  را مشخص کرد (چون جواب‌های به دست آمده طولانی هستند، از ارائه آن‌ها صرف‌نظر می‌شود). اکنون با در دست داشتن پارامترهای آبخوان می‌توان مقدار  $h_{11}$  و  $h_{12}$  را به دست آورد. با ارائه روشی مشابه مقدار  $h_{21}$  و  $h_{22}$  به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$h_{21}(x,t) = h_m + \text{Re}[(b_1 e^{\alpha_1 x} + b_2 e^{\alpha_2 x} + b_3 e^{\alpha_3 x} + b_4 e^{\alpha_4 x}) e^{-i\omega t}] \quad (46)$$

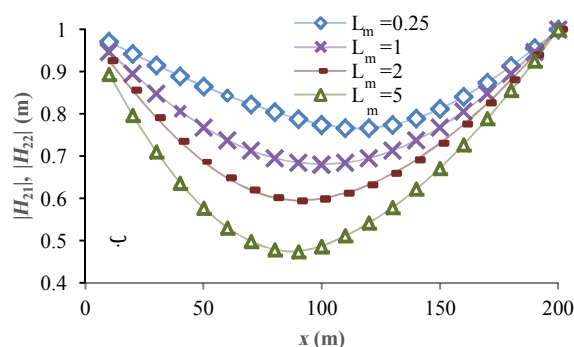
$$h_{22}(x,t) = h_m + \text{Re}[b_5 e^{\alpha_5 x} + b_6 e^{\alpha_6 x} + b_7 e^{\alpha_7 x} + b_8 e^{\alpha_8 x}) e^{-i\omega t}] \quad (47)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4c_1})} \quad (48)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4c_1})}$$

ذخیره آبخوان آزاد ساحل چپ به ضریب ذخیره آبخوان آزاد ساحل راست،  $T_m = T_{11} / T_{12}$  ضریب انتقال آبخوان آزاد ساحل چپ به ضریب انتقال آبخوان آزاد ساحل راست،  $S_B = S_{21} / S_{22}$  ضریب ذخیره آبخوان نیمه‌محصور ساحل چپ به ضریب ذخیره آبخوان نیمه‌محصور ساحل راست و  $T_B = T_{21} / T_{22}$  ضریب انتقال آبخوان نیمه‌محصور ساحل چپ به ضریب انتقال آبخوان نیمه‌محصور ساحل راست است.

دامنه نوسانات آب زیرزمینی در آبخوان آزاد و نیمه‌محصور، به ترتیب، در شکل‌های ۲-الف و ۲-ب برای مقادیر مختلف  $L_m$  نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در آبخوان آزاد افزایش نشت سبب کاهش دامنه نوسانات شده است و در آبخوان نیمه‌محصور افزایش نشت سبب افزایش دامنه نوسانات شده است. همچنین در فاصله ۱۰۰ متری از مبدأ کمترین دامنه نوسانات در هر آبخوان آزاد اتفاق می‌افتد. ولی در آبخوان نیمه‌محصور برای  $L_m = 0.25$  در  $x = 120m$  و برای  $L_m = 5$  در  $x = 90m$  کمترین دامنه نوسانات اتفاق می‌افتد. شکل‌ها نشان می‌دهند که میزان دامنه نوسانات در آبخوان نیمه‌محصور بیشتر از آبخوان آزاد است. علاوه بر این، تغییرات نشت اثر بیشتری روی نوسانات آبخوان نیمه‌محصور نسبت به آبخوان آزاد دارد.



شکل ۲- دامنه نوسانات در (الف) آبخوان آزاد و (ب) آبخوان نیمه‌محصور در مقابل  $x$  برای مقدار مختلف نشت

با این وجود با بررسی دقیق‌تر نتایج مشخص می‌شود که زمان تأخیر در آبخوان آزاد با افزایش  $L_m$  به طور غیر قابل ملاحظه‌ای کاهش پیدا می‌کند. ولی همان طور که از قبل بیان شد، با افزایش  $L_m$  دامنه نوسانات در آبخوان آزاد بیشتر می‌شود. شکل‌های ۳-ج و ۳-د نوسانات سطح آب را برای آبخوان نیمه‌محصور نسبت به زمان برای  $L_m$  های

$$b_2 = i\omega \left( \frac{S_{22}}{T_{22}} + \frac{S_{12}}{T_{12}} \right) - L_2 \left( \frac{1}{T_{22}} + \frac{1}{T_{12}} \right)$$

$$c_1 = - \frac{\omega^2 S_{11} S_{21}}{T_{11} T_{21}} - \frac{i\omega L_1}{T_{11} T_{21}} (S_{11} + S_{21})$$

$$c_2 = - \frac{\omega^2 S_{12} S_{22}}{T_{12} T_{22}} - \frac{i\omega L_2}{T_{12} T_{22}} (S_{12} + S_{22})$$

ضریب‌های ثابت  $b_1$ ،  $b_2$ ، ... و  $b_8$  با استفاده از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

### نتایج و بحث

برای تجزیه و تحلیل نتایج به دست آمده، داده‌های یک آبخوان ساحلی معمولی که در بررسی جنگ و همکاران (۲۰۰۲) استفاده شده، به کار برده می‌شود. این داده‌ها عبارتند از:

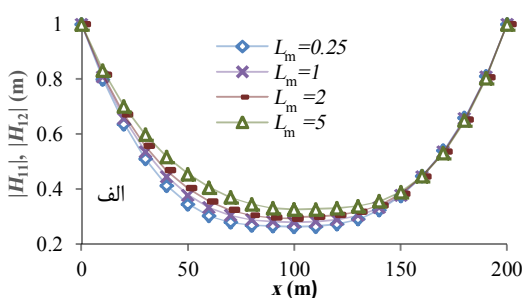
$$S_{11} = S_{12} = 0.3, \quad L_1 = L_2 = 100m$$

$$T_{11} = T_{12} = T_{21} = T_{22} = 2000 m^2/day,$$

$$\omega = 2\pi rad/day, \quad A = 1m \quad S_{21} = S_{22} = 0.001$$

$$h_m = 10m, \quad L_1 = L_2 = 0.2 \quad 1/day$$

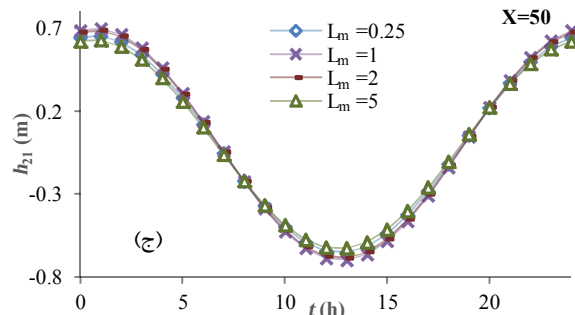
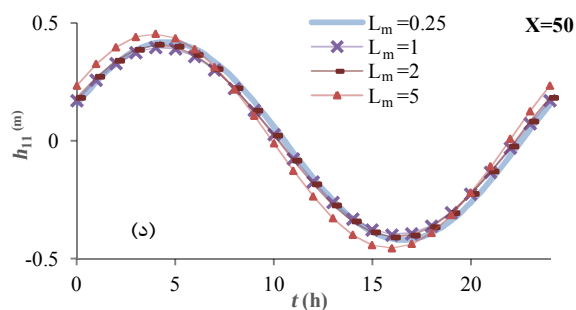
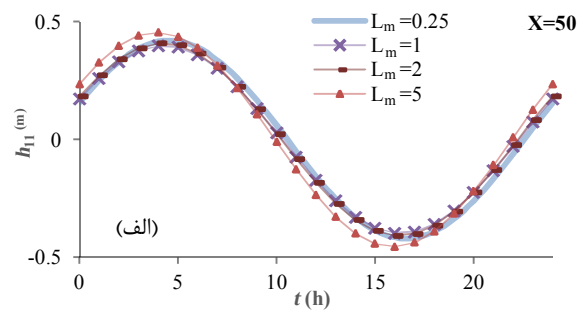
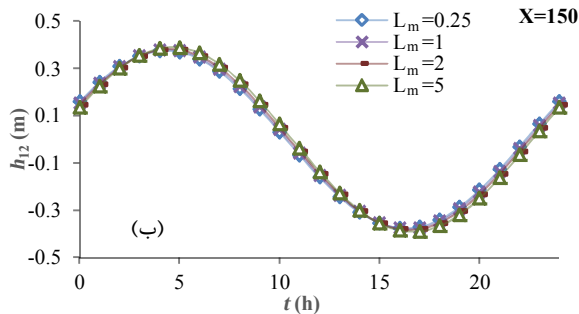
برای بررسی بهتر نتایج، پارامترهای بدون بعدی به صورت زیر تعریف می‌شوند:  $L_m = L_1 / L_2$  نشت ساحل سمت چپ به نشت ساحل سمت راست است که آن مقدار نشت بی‌بعد شده نامیده می‌شود.  $S_m = S_{11} / S_{12}$  ضریب



شکل‌های ۳-الف و ۳-ب تغییرات سطح آب زیرزمینی را برای آبخوان آزاد در برابر زمان برای نشت‌های مختلف به ترتیب در دو نقطه  $x = 50m$  و  $x = 150m$  نشان می‌دهند. شکل ۳-الف بیانگر این است که زمان تأخیر (فاصله زمانی بین قله نوسانات در آبخوان نسبت به نوسانات جزر و مد) در آبخوان آزاد چندان تغییر نمی‌کند،

آبخوان نیمه‌محصور نسبت به آبخوان آزاد کمتر است. همچنین  $L_m$  اثر کمی بر زمان تأخیر در آبخوان نیمه‌محصور دارد.

مختلف در دو نقطه  $x=150\text{ m}$  و  $x=50\text{ m}$  نشان می‌دهند. با مقایسه نتایج در آبخوان آزاد (شکل‌های ۳-الف و ۳-ب) و نتایج در آبخوان نیمه‌محصور (شکل‌های ۳-ج و ۳-د) مشخص می‌شود که زمان تأخیر برای

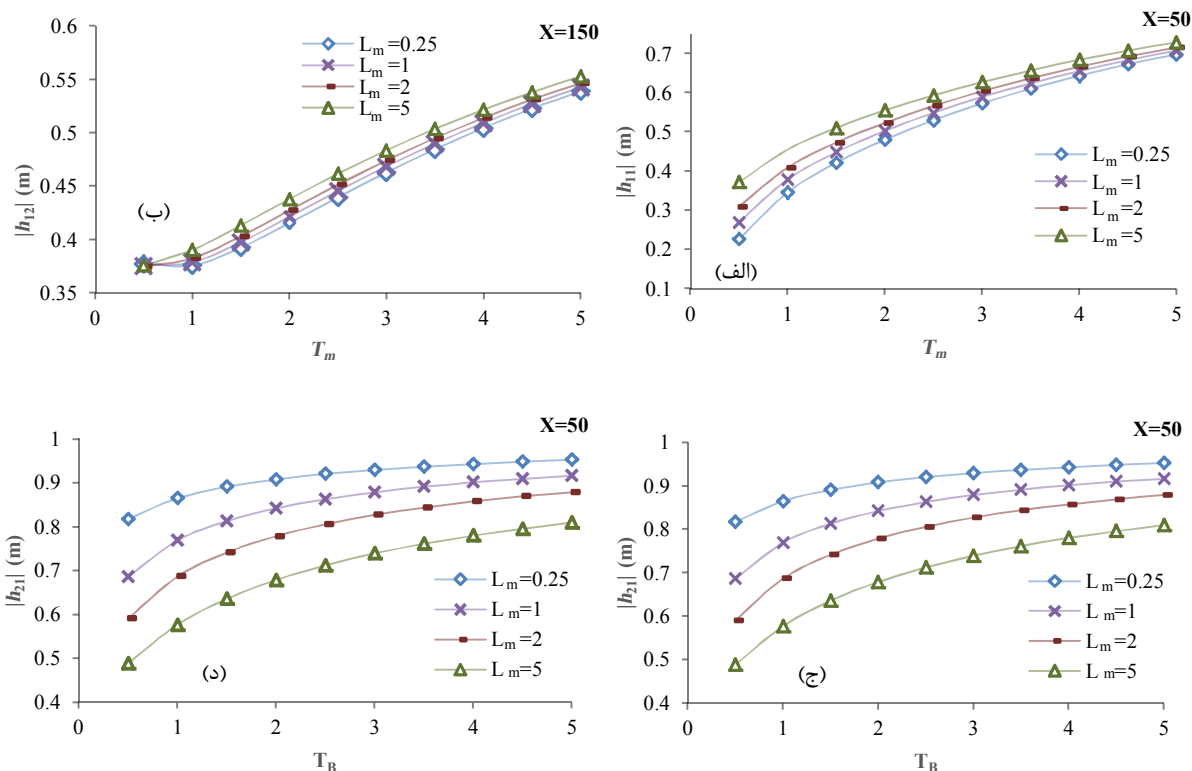


شکل ۳- مکان سطح آب در برابر زمان (الف) در آبخوان آزاد در  $x=50\text{ m}$  و (ب) در آبخوان آزاد در  $x=150\text{ m}$  و (ج) و (د) در آبخوان نیمه‌محصور  $x=50\text{ m}$  (د) در آبخوان نیمه‌محصور  $x=150\text{ m}$  برای  $L_m$  های مختلف

آب را برای آبخوان نیمه‌محصور، به ترتیب در فواصل ۵۰ و ۱۵۰ متری از مبدأ برای  $L_m$  های مختلف نشان می‌دهند. این شکل بیانگر این است که با افزایش  $T_B$  دامنه نوسانات افزایش پیدا می‌کند. اما با افزایش  $T_B$  شیب نمودار کاهش پیدا می‌کند. به عبارت دیگر، شدت افزایش دامنه نوسانات با افزایش  $T_B$  کاهش پیدا می‌کند. برای  $L_m=0.25$  و  $T_B$  های بزرگ، با افزایش مقدار  $T_B$  شدت نوسانات تغییر چندانی نمی‌کند. دلیل افزایش دامنه نوسانات می‌تواند این باشد که با افزایش ضریب انتقال، سرعت آب در آبخوان افزایش می‌یابد، پس جزر و مد در آبخوان با سرعت بیشتری انتشار می‌یابد، بنابراین، دامنه نوسانات با افزایش ضریب انتقال افزایش می‌یابد.

شکل‌های ۴-الف و ۴-ب دامنه نوسانات سطح آب را در آبخوان آزاد، به ترتیب در فواصل ۵۰ و ۱۵۰ متری از مبدأ نسبت به  $T_m$  نمایش می‌دهند. این دو شکل نشان می‌دهند که در آبخوان آزاد سمت چپ، افزایش  $T_m$  سبب افزایش نوسانات سطح آب می‌شود، و در آبخوان آزاد سمت راست برای  $T_m$  های بزرگ‌تر از یک، افزایش  $T_m$  باعث افزایش نوسانات سطح آب می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که در  $T_m=0.5$  دامنه نوسانات آب زیرزمینی در آبخوان آزاد سمت چپ با تغییرات  $L_m$  به شدت تغییر می‌کند. در صورتی که در آبخوان سمت راست، دامنه نوسانات در  $T_m=0.5$  با تغییرات  $L_m$  چندان عوض نمی‌شود. شکل‌های ۴-ج و ۴-د دامنه نوسانات سطح

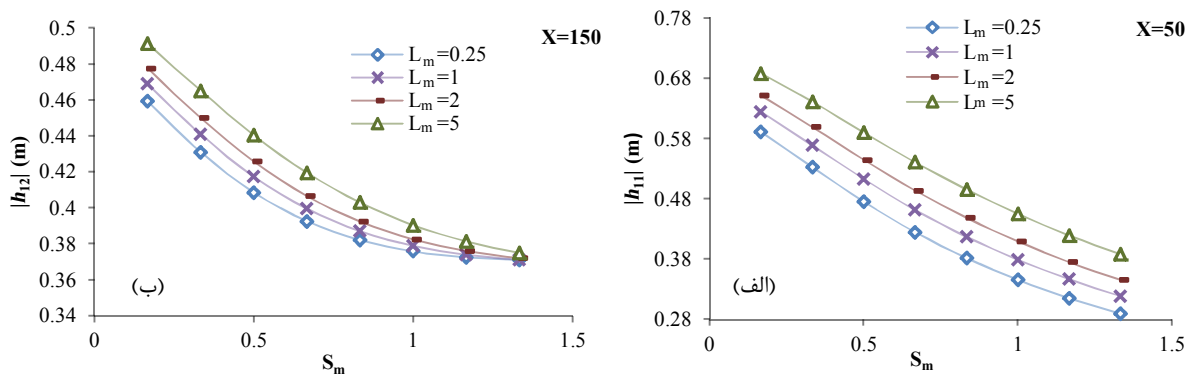




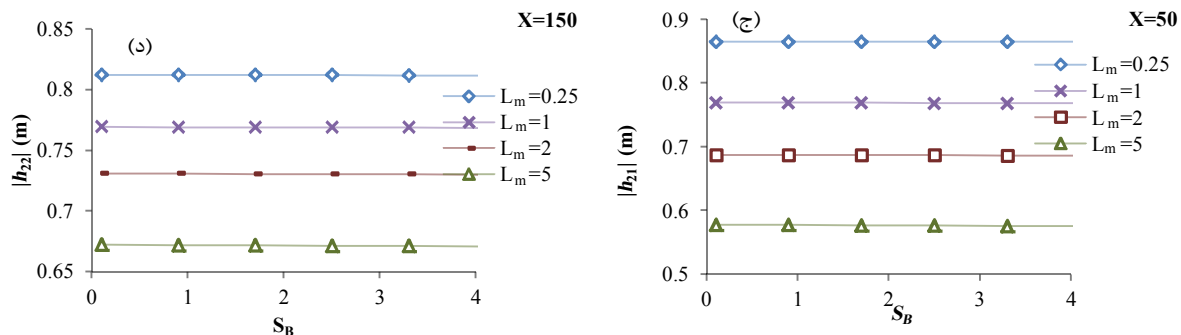
شکل ۴- تغییرات دامنه نوسانات در برابر ضریب انتقال (الف) در آبخوان آزاد در  $x = 50\text{ m}$  ، (ب) در آبخوان آزاد در  $x = 150\text{ m}$  ، (ج) در آبخوان نیمه‌محصور در  $x = 50\text{ m}$  و (د) در آبخوان نیمه‌محصور در  $x = 150\text{ m}$

منحنی‌ها در فاصله ۱۵۰ متری نسبت به فاصله ۵۰ متری بیشتر است. شکل‌های ۵-ج و ۵-د تغییرات نوسانات آبخوان نیمه‌محصور را نسبت به پارامتر بدون بعد  $S_B$  برای  $L_m$  های مختلف در دو نقطه ۵۰ و ۱۵۰ متری از مبدأ نشان می‌دهند. نتایج بیانگر این است که با افزایش  $S_B$  دامنه نوسانات تغییر محسوسی پیدا نکرده است. این نکته بیانگر این است که افزایش  $S_B$  اثر خیلی کمی روی دامنه نوسانات در آبخوان نیمه‌محصور دارد.

شکل‌های ۵-الف و ۵-ب تغییرات نوسانات سطح آب در آبخوان آزاد را نسبت به پارامتر بدون بعد  $S_m$  برای  $L_m$  های مختلف، به ترتیب در دو نقطه ۵۰ و ۱۵۰ متری از مبدأ نشان می‌دهند. همان طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، با افزایش  $S_m$  دامنه نوسانات کاهش پیدا کرده است. با افزایش ضریب ذخیره میرایی سیستم افزایش پیدا می‌کند، پس دامنه نوسانات کاهش پیدا می‌کند که این با نتایج جنگ و همکاران (۲۰۰۲) هماهنگی دارد. با مقایسه شکل‌های ۵-ب و ۵-الف می‌توان دریافت که شیب



شکل ۵- تغییرات دامنه نوسانات در برابر ضریب ذخیره (الف) در آبخوان آزاد در  $x = 50\text{ m}$  ، (ب) در آبخوان آزاد در  $x = 150\text{ m}$  ، (ج) در آبخوان نیمه‌محصور در  $x = 50\text{ m}$  و (د) در آبخوان نیمه‌محصور در  $x = 150\text{ m}$



ادامه شکل ۵-

infinite distance under the sea. *Advances in Water Resources*. 30(3): 439-445.

- Chuang M. H. Asadi-Aghbolaghi M. and Yeh H. D. 2012. A perturbation solution for head fluctuations in a coastal leaky aquifer system considering water table over-height. *Hydrological Sciences Journal*. 57(1): 1162-1172.
- Farrell E. R. 1994. Analysis of groundwater flow through leaky marine retaining structures. *Geotechnique*. 44(2): 255-263.
- Huang C. S. Yeh H. D. and Chang C. H. 2012. A general analytical solution for groundwater fluctuations due to dual tide in long but narrow islands. *Water Resources Research*. 48(5): W05508.
- Jeng D. S. Li L. and Barry D. A. 2002. Analytical solution for tidal propagation in a coupled semi-confined/phreatic coastal aquifer. *Advances in Water Resources*. 25(5): 577-584.
- Li H. and Jiao J. J. 2003. Tide-induced seawater-groundwater circulation in a multi-layered coastal leaky aquifer system. *Journal of Hydrology*. 274(1-4): 211-224.
- Li L. and Barry D. A. 2002. Tidal fluctuations in a leaky confined aquifer: Localized effects of an overlying phreatic aquifer. *Journal of Hydrology*. 265(1-4): 283-287.
- Parlange J. Y. Stagniti F. S. Starr J. L. and Braddock R.D. 1984. Free-surface flow in porous media and periodic solution of the shallow-flow approximation. *Journal of Hydrology*. 70(1-4): 251-263.
- Philip J. R. 1973. Periodic nonlinear diffusion: An integral relation and its physical consequences. *Australian Journal of Physics*. 26: 513-519.
- Rotzoll K. Kadi A. E. and Gingerich S. B. 2008. Analysis of an unconfined aquifer subject to A synchronous dual-tide propagation. *Ground Water*. 46(2): 239-250.
- Song Z. Li L. Jun K. and Zhang H. 2007. A new analytical solution of tidal water table fluctuations in a coastal unconfined aquifer. *Journal of Hydrology*. 340(3-4): 256-260.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک راه حل تحلیلی برای سیستم آبخوان چندلایه غیر همگن توسعه داده شد. این سیستم آبخوان شامل یک آبخوان آزاد در بالا یک آبخوان نیمه‌محصور در پایین و یک لایه نیمه‌تراوا در بین آنها است. تمام لایه‌ها به صورت ناهمگن در نظر گرفته شدند. برای بررسی نتایج از پارامترهای بدون بعد استفاده شد. نتایج نشان داد که افزایش نشت سبب افزایش دامنه نوسانات آبخوان آزاد و کاهش نوسانات در آبخوان نیمه‌محصور می‌شود. همچنین، افزایش ضریب ذخیره در آبخوان آزاد سبب کاهش نوسانات سطح آب شده است. اما در آبخوان نیمه‌محصور، تغییر ضریب ذخیره سبب تغییر دامنه نوسانات نمی‌شود. در واقع افزایش ضریب ذخیره سبب افزایش میرایی نوسانات آب زیرزمینی در آبخوان آزاد شده است. همچنین افزایش ضریب انتقال در آبخوان آزاد و نیمه‌محصور باعث افزایش نوسانات سطح آب شده است، به عبارت دیگر با افزایش ضریب انتقال، سرعت آب در آبخوان افزایش می‌یابد، پس دامنه نوسانات با افزایش ضریب انتقال افزایش می‌یابد.

## منابع

- Asadi-Aghbolaghi M. Chuang M. H. and Yeh H. D. H. 2012. Groundwater response to tidal fluctuation in a sloping leaky aquifer system. *Applied Mathematical Modelling*. 36(10): 4750-4759.
- Ataie-Ashtiani B. Volker R. E. and Lockington D. A. 1999. Tidal effects on sea water intrusion in unconfined aquifers. *Journal of Hydrology*. 216(1): 17-31.
- Bear J. 1979. *Hydraulics of Groundwater*. McGraw-Hill, New York, USA. 569 p.
- Chuang M. H. and Yeh H. D. 2007. An analytical solution for the head distribution in a tidal 5- leaky confined aquifer extending an