

## کاربرد روش‌های المان محدود و حجم محدود در تحلیل جریان آب روی سرریز اوجی (مطالعه موردی: سد دامغان)

محمد رضا نیک‌پور<sup>۱\*</sup>، زینب سلمانی جلودار<sup>۲</sup>، علی حسین‌زاده دلیر<sup>۳</sup>، هادی ثانی خانی<sup>۴</sup> و فریناز شجاع<sup>۵</sup>

### چکیده

طراحی هیدرولیکی صحیح و دقیق سرریزها به‌عنوان یکی از اجزای اصلی سدها، اهمیت زیادی در پایداری و ایمنی سدها دارد. تعیین مشخصه‌های هیدرولیکی جریان با مدل‌های فیزیکی، نیاز به هزینه و وقت زیاد دارد. در این پژوهش با حل عددی توابع پواسون جریان و فشار به روش المان محدود و با تحلیل مدل آشفتگی  $k-\epsilon$  و مدل حجم سیال با استفاده از تکنیک حجم محدود، جریان روی سرریز اوجی در حالت دو بعدی شبیه‌سازی شد. همچنین نتایج حاصل از مدل‌های مذکور و مقادیر اندازه‌گیری شده با هم مقایسه شده و دقت مدل‌ها در تعیین پروفیل سطح آب و سرعت جریان بررسی شد. میانگین خطای نسبی محاسبه سرعت به ازای روش‌های المان محدود و حجم محدود به‌ترتیب  $1/25\%$  و  $0/72\%$  به دست آمد. نتایج نشان داد که روش حجم محدود در شبیه‌سازی هیدرولیک جریان عملکرد بهتری داشته است.

**واژه‌های کلیدی:** حل عددی، خطای نسبی، سرریز، مدل آشفتگی، هیدرولیک جریان.

**ارجاع:** نیک‌پور م. ر. سلمانی جلودار ز. حسین‌زاده دلیر ع. ثانی‌خانی ه. و شجاع ف. ۱۳۹۳. کاربرد روش‌های المان محدود و حجم محدود در تحلیل جریان آب روی سرریز اوجی (مطالعه موردی: سرریز سد دامغان). مجله پژوهش آب ایران. ۸(۱۴):۵۵-۶۳.

۱- دانشجوی دکتری سازه‌های آبی، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز.

۲- کارشناسی ارشد سازه‌های آبی، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه مازندران.

۳- دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز.

۴- دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب، عضو باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ساوه، ایران.

۵- کارشناسی ارشد سازه‌های آبی، گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز.

\* نویسنده مسئول: [rezanikpoor@yahoo.com](mailto:rezanikpoor@yahoo.com)

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۰۸/۲۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۱/۲۹

## مقدمه

سرریز سازه هیدرولیکی است که به طور معمول در سدهای تأخیری و مخزنی برای رها کردن آب اضافی و سیلابی در مواقع اضطراری، به کار می‌رود. با افزایش تعداد سدهای مخزنی و با توجه به لزوم ساخت سرریز روی این سازه‌ها مطالعه دقیق روی سرریز سدها برای رفع مسائل و مشکلاتی که در اثر استفاده از آن‌ها به وجود می‌آید، لازم است (چتیلا و تابارا، ۲۰۰۴). در دهه‌های گذشته استانداردهای طراحی برای پروفیل تاج سرریز توسعه یافته است، اما گاهی وقت‌ها به دلیل پایداری و یا مسائل اقتصادی، استفاده از پروفیل تاج استاندارد ممکن نیست. پس از انتخاب پروفیل تاج سرریز، نیاز به ایجاد تغییراتی است که پارامترهایی نظیر پروفیل سطح آزاد جریان، مقدار سرعت در نقاط مختلف، میزان فشار روی تاج سرریز و ... تعیین شوند (درگاهی، ۲۰۰۶).

از دیرباز مطالعات تجربی و آزمایشگاهی برای یافتن چنین خصوصیتی مورد توجه بوده‌اند، اما تهیه مدل فیزیکی، پرهزینه بوده و ساخت آن به زمان زیادی نیاز دارد. با توجه به مشکلات مذکور و از سوی دیگر پیشرفت روزافزون علوم کامپیوتر، شبیه‌سازی عددی جریان آب روی سرریزها راه حلی منطقی و باصرفه است. ضمن اینکه به کمک مدل‌های عددی می‌توان هندسه‌های مختلفی از سرریز را شبیه‌سازی و سپس در خصوص بهترین گزینه از نظر شرایط هیدرولیکی اقدام به ساخت مدل واقعی کرد. به دلیل اهمیت موضوع، بسیاری از پژوهشگران از گذشته تاکنون تلاش‌های زیادی برای دستیابی به نتایج بهتر انجام داده‌اند. کاسیدی (۱۹۶۵) برای اولین بار از معادله‌های آنالیز ابعادی و فرض جریان‌های غیرچرخشی برای تحلیل جریان روی سرریز استفاده کرد. وی توانست پروفیل سطح آب و ضریب تخلیه سرریز را محاسبه کند. هندرسون و همکاران (۱۹۹۱) خطر کاویتاسیون روی سرریز را با کمک روش المان مرزی<sup>۱</sup> بررسی کردند و به نتایج خوبی دست یافتند. سویچ و جانسون (۲۰۰۱) جریان روی سرریز اوجی استاندارد را با نرم‌افزار FLOW3D در حالت دو بعدی شبیه‌سازی کردند. نتایج مدل عددی شامل ضریب دبی سرریز، فشار تاج سرریز و پروفیل سطح آب با مقادیر آزمایشگاهی از همخوانی خوبی داشت. تابارا و همکاران (۲۰۰۵) پس از ساخت چهار مدل آزمایشگاهی سرریز

پلکانی با هندسه‌های متفاوت، با نرم‌افزار ADINA مدل‌های مذکور را به صورت عددی شبیه‌سازی کردند. در تمامی موارد، پروفیل سطح آب حاصل از مدل عددی بسیار نزدیک به مدل آزمایشگاهی به دست آمد و پارامتر استهلاك انرژی نیز هماهنگی خوبی با نتایج آزمایشگاهی داشت. درگاهی (۲۰۰۶) از نرم‌افزار FLUENT برای شبیه‌سازی جریان روی سرریز اوجی در حالت سه بعدی استفاده کرد. پس از آزمون مدل‌های آشفتگی مختلف، مدل RNG<sup>۲</sup> بهترین نتیجه را در مقایسه با مقادیر آزمایشگاهی از خود نشان داد. فراری (۲۰۱۰) برای تحلیل جریان روی سرریز لبه تیز از یک روش بدون شبکه<sup>۳</sup> به نام SPH<sup>۴</sup> استفاده کرد. نتایج به دست آمده از مدل عددی در مقایسه با مدل فیزیکی از تطابق خوبی برخوردار بودند. حسنی (۱۳۸۲) برای تحلیل جریان روی سرریز اوجی با فرض جریان غیرچرخشی، سیال بدون لزجت و غیرقابل تراکم از توابع جریان و پتانسیل در محیط نرم‌افزار DOT استفاده کرد. سپس برای کنترل دقت و کارایی مدل عددی از داده‌های مربوط به سرریز اوجی یکی از سدهای کشور ایران استفاده کرد. مدل مذکور در تعیین پروفیل سطح آب و مقدار سرعت در نقاط مختلف روی سرریز دقت قابل قبولی به همراه داشت. کریمی و موسوی جهرمی (۱۳۸۹) رژیم جریان روی سرریز پلکانی را با استفاده از نرم‌افزار ANSYS که براساس روش المان محدود<sup>۵</sup> عمل می‌کند، بررسی و دقت شبیه‌سازی جریان را مناسب گزارش کردند.

در این پژوهش با حل عددی توابع پواسون جریان و فشار به روش المان محدود و با تحلیل مدل‌های آشفتگی k-ε (استاندارد، RNG و Realizable) و مدل حجم سیال با تکنیک حجم محدود<sup>۶</sup>، جریان روی سرریز اوجی در حالت دو بعدی (در مقطع طولی) شبیه‌سازی شد. همچنین نتایج حاصل از مدل‌های مذکور و مقادیر اندازه‌گیری شده با هم مقایسه شد و دقت مدل‌ها در تعیین پروفیل سطح آب و سرعت جریان بررسی شد.

2- Renormalization-Group k-ε model (RNG)

3- Mesh less

4- Smooth Particle Hydrodynamics (SPH)

5- Finite Element (FE)

6- Finite Volume (FV)

1- Boundary element

## مواد و روش‌ها

## روش حجم محدود

این روش از شکل انتگرالی معادلات حاکم بر جریان استفاده می‌کند. در این روش بازه محاسبات به تعداد محدودی از حجم‌های بهم پیوسته تقسیم شده و معادلات حاکم، بر روی هر حجم کنترل حل می‌شوند. مرکز هر حجم کنترل به‌عنوان گره محاسباتی فرض می‌شود و مقادیر متغیرها در این گره‌ها محاسبه شده و با میان‌بایی به سطح‌های آن تعمیم داده می‌شود. سطح و حجم انتگرال‌ها با فرمول‌های درجه چهارم مناسب تخمین زده می‌شود که نتیجه آن به دست آمدن معادله جبری برای هر حجم کنترل است. روش حجم محدود برای هر نوع شبکه، حتی در هندسه‌های پیچیده استفاده می‌شود (فریزر و پریک، ۲۰۰۲).

## روش المان محدود

این روش بسیار مشابه روش حجم محدود است. در این روش بازه محاسبات به حجم‌ها یا المان‌های جداگانه که به طور عموم نامنظم هستند، تقسیم می‌شود. روش المان محدود مبتنی بر دو روش کلی حساب تغییرات<sup>۱</sup> و باقیمانده وزنی<sup>۲</sup> است. مزیت روش باقیمانده وزنی این است که در این روش، معادلات قبل از آن که روی تمام بازه انتگرال‌گیری شوند، با تابع وزنی<sup>۳</sup> تقریب زده می‌شوند. متداول‌ترین روش المان محدود براساس تکنیک باقیمانده وزنی، روش گالرکین است. یکی از مزیت‌های مهم روش المان محدود قابلیت کاربرد آن در هندسه‌های دلخواه و متفاوت است و برای تحلیل‌های ریاضی در بیشتر موارد ساده‌تر است (فریزر و پریک، ۲۰۰۲).

## معادلات حاکم

معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان آب از روی سرریزها در شرایط دو بعدی شامل یک معادله پیوستگی و دو معادله اندازه حرکت ناویر-استوکس است. با فرض جریان غیرچرخشی، سیال غیرلزج و غیرقابل تراکم می‌توان تعداد معادلات حاکم و در نتیجه مجهولات مسأله را با توابع جریان و گردابی کاهش داد و به این ترتیب پیچیدگی کمتری را در تحلیل عددی چنین جریان‌هایی متحمل شد. در معادلات اندازه حرکت با مشتق‌گیری از پارامتر  $u$  (مؤلفه سرعت در جهت  $X$ ) نسبت به  $Y$  و همچنین

مشتق‌گیری از پارامتر  $v$  (مؤلفه سرعت در جهت  $Y$ ) نسبت به  $X$  و سپس تفریق معادلات، معادله ۱ به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ & + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

جملات چهارم و هفتم معادله ۱ ضربی از معادله  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  هستند که براساس معادله پیوستگی دارای مقداری برابر صفر است. با جایگزینی تعریف تابع انتقال چرخش<sup>۴</sup> دو بعدی مطابق معادله ۲، معادله ۳ به دست خواهد آمد.

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

از طرفی تابع جریان  $\psi$  به‌صورت معادلات ۴ و ۵ تعریف می‌شود:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

بر این اساس معادله مربوط به تابع چرخشی، باعث معادله پواسون مطابق معادله ۶ خواهد شد:

$$\nabla^2 \psi = \zeta \quad (6)$$

به این ترتیب سه معادله پیوستگی و اندازه حرکت بر جریان دو بعدی سیالات تراکم‌ناپذیر به دو معادله انتقال چرخش  $\zeta$  و معادله پواسون تابع جریان  $\psi$  تبدیل می‌شود. لازم به ذکر است که در معادله ۶ نماد  $\nabla^2$  معرف عملگر لاپلاس است. با حل دو معادله مذکور و به دست آوردن توزیع توابع انتقال چرخش و جریان می‌توان توزیع سرعت‌های  $u$  و  $v$  را با تعریف تابع جریان به دست آورد. پس از محاسبه مقادیر تابع جریان می‌توان توزیع فشار را از طریق حل معادله پواسون فشار به دست آورد. معادله فشار را می‌توان با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های  $u$  و  $v$  معادلات اندازه حرکت نسبت به  $X$  و  $Y$  و جمع

1 Vibrational arithmetic

2 Weighted residual

3- Weight function

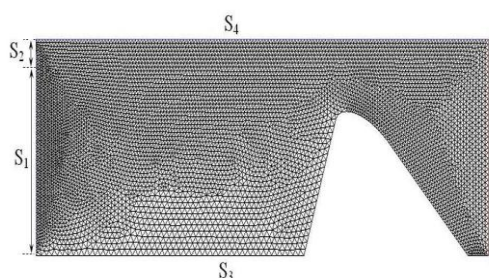
4- Vorticity transport equation

جدول ۱- مشخصات سرریز اوجی سد مخزنی دامغان

| توضیحات                | پارامتر                |
|------------------------|------------------------|
| WES                    | نوع سرریز              |
| ۷۴ متر                 | طول خالص تاج سرریز     |
| 1H:3V                  | شیب وجه بالادست        |
| $y = 0.278x^{1.84}$    | معادله آستانه سرریز    |
| C = 2.174              | ضریب آبگذری سرریز      |
| ۱۳۲۰/۵ متر از سطح دریا | رقوم آستانه سرریز      |
| ۱۳۱۵/۵ متر از سطح دریا | رقوم کف در پاشنه سرریز |
| ۱۳۱۳/۵ متر از سطح دریا | رقوم کف در پنجه سرریز  |

## مشخصات مدل و شرایط مرزی در روش حجم محدود

در این پژوهش برای به‌کارگیری روش حجم محدود از نرم‌افزار FLUENT استفاده شد. در محیط این نرم‌افزار برای شبیه‌سازی حرکت سیال معادلات ناویر-استوکس در حالت کامل به همراه معادلات آشفته‌گی و مدل شبیه‌سازی جریان چند فازی حل می‌شوند. برای تحلیل آشفته‌گی از مدل k-ε و برای شبیه‌سازی جریان چند فازی از مدل حجم سیال<sup>۱</sup> استفاده شد. قبل از ورود به محیط FLUENT هندسه مدل با نرم‌افزار GAMBIT شبکه‌بندی شد. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است برای شبکه‌بندی از المان‌های مثلثی استفاده شد. بر طبق شکل ۲ شرایط مرزی در نرم‌افزار FLUENT به شرح زیر تعریف شدند: برای مرز S<sub>۱</sub> ورودی سرعت<sup>۲</sup> آب، مرز S<sub>۲</sub> ورودی سرعت هوا، مرز S<sub>۳</sub> دیواره، مرز S<sub>۴</sub> ورودی فشار<sup>۳</sup> و مرز S<sub>۵</sub> خروجی فشار<sup>۴</sup> در نظر گرفته شد.



شکل ۲- مدل شبکه‌بندی شده سرریز در محیط GAMBIT به همراه شرایط مرزی

## مشخصات مدل و شرایط مرزی در روش المان محدود

در این پژوهش برای استفاده از روش المان محدود گالرکین از برنامه کامپیوتری که در محیط فرترن ۹۰ توسط نویسندگان مقاله تدوین شده بود، استفاده شد. این

کردن آن‌ها به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad (7)$$

$$+ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -\nabla^2 p$$

جمله‌های اول، پنجم و ششم معادله ۷ ضربی از معادله پیوستگی و در نتیجه دارای مقادیری برابر صفر هستند. بدین ترتیب معادله فشار به صورت زیر خلاصه می‌شود:

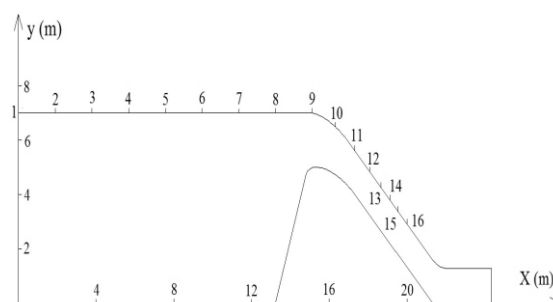
$$-\nabla^2 p = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (8)$$

صورت نهایی معادله پواسون فشار به صورت معادله ۹ به دست می‌آید:

$$\nabla^2 p = 2 \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (9)$$

## مشخصات سرریز مورد مطالعه

در این پژوهش برای مقایسه نتایج مدل‌های عددی با مقادیر واقعی از داده‌های مربوط به سرریز سد مخزنی دامغان استفاده شد. سرریز سد دامغان، سرریز اوجی WES بدون دریچه است. مشخصات سرریز در جدول ۱ ارائه شده است (حسنی، ۱۳۸۲). در این سرریز پروفیل سطح آزاد آب با اشل با دقت  $\pm 1$  سانتی‌متر و مقادیر سرعت با مولینه اندازه‌گیری شدند. همچنین داده‌های اندازه‌گیری شده مورد استفاده در این پژوهش به ازای دبی عبوری ۶/۱۵ مترمکعب بر ثانیه در واحد عرض سرریز است. شکل ۱ شمای کلی سرریز و محل برداشت عمق و سرعت جریان را در مدل واقعی نشان می‌دهد.



شکل ۱- شمای کلی سرریز و محل برداشت مقادیر عمق و سرعت جریان در مدل واقعی

1- Volume of Fluid (VOF)

2- Velocity inlet

3- Pressure inlet

4- Pressure outlet

برای مرز  $S_4$  علاوه بر شرط مرزی در نظر گرفته شده (معادله ۱۳) باید یک شرط مرزی دیگر که عبارت است از فشار نسبی صفر روی سطح آزاد تأمین شود. اما عملی شدن این شرط با توجه به تقریبی بودن سطح آزاد در ابتدای کار مقدور نبود، پس در تکرارهای بعدی و انجام عمل سعی و خطا با نزدیک شدن به سطح آزاد واقعی این شرط برقرار شد. در مرحله بعد برای محاسبه مقادیر فشار در المان‌ها، معادله پواسون فشار حل شد. با بررسی مؤلفه قائم سرعت و همچنین فشار نسبی روی سطح آزاد در صورت عدم صحت موقعیت فرضی سطح آزاد آب، موقعیت آن به طور عمودی تغییر داده شده و بار دیگر معادلات پواسون جریان و فشار حل شدند. این عملیات آن قدر ادامه پیدا کرد تا همگرایی کامل حاصل شده و هر دو شرط مرزی روی سطح آزاد برقرار شد. در نهایت برای بررسی کارایی مدل‌های عددی پارامتر RE به ازای عمق و سرعت محاسباتی در مقایسه با مقادیر اندازه‌گیری شده با معادله ۱۵ به صورت جداگانه محاسبه شد.

$$RE (\%) = \left| \frac{y_{obs} - y_{cal}}{y_{obs}} \right| \times 100 \quad (15)$$

که در آن  $y_{obs}$  مقادیر عمق مشاهده‌ای و  $y_{cal}$  مقادیر عمق محاسباتی و RE خطای نسبی بر حسب درصد است.

### نتایج و بحث

بعد از اجرای برنامه‌ها مقادیر عمق و سرعت محاسبه شده توسط مدل‌های عددی براساس مختصات نقطه‌های تعریف شده در مدل واقعی استخراج شد. با توجه به اینکه میانگین RE محاسبه سرعت در هر دو مدل عددی همیشه بیشتر از میانگین RE محاسبه پروفیل سطح آب بود، پس برای تعیین تعداد المان لازم به منظور مستقل از شبکه کردن مدل‌های عددی، میانگین RE مربوط به محاسبه سرعت در نظر گرفته شد. شکل‌های ۴ و ۵ نحوه تغییرات میانگین RE روش‌های المان محدود و حجم محدود را در محاسبه مقادیر سرعت جریان نسبت به تعداد المان‌ها نشان می‌دهد. همان‌طور که شکل ۴ نشان می‌دهد در روش المان محدود با افزایش تعداد المان‌ها به بیش از ۳۳۴۲، RE مدل کاهش محسوسی ندارد و به بیان دیگر به ازای این تعداد المان، مدل عددی مستقل از شبکه عمل می‌کند. همچنین با توجه به شکل ۵ روش حجم محدود به ازای ۷۳۸۴ المان مستقل از شبکه عمل می‌کند. از

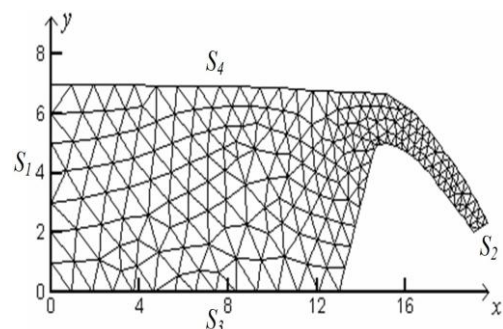
برنامه براساس حل عددی توابع پواسون جریان (معادله ۶) و پواسون فشار (معادله ۹) به روش گالرکین تنظیم شده بود. روند اجرای برنامه به این صورت بود که ابتدا موقعیت سطح آزاد جریان فرض شده و سپس ناحیه مورد نظر با به کارگیری المان‌های مثلثی شبکه‌بندی شد. شکل ۳ نمونه‌ای از محیط شبکه‌بندی شده سرریز را نشان می‌دهد. همچنین برنامه مذکور این قابلیت را داشت که در نقاط دلخواه، فاصله‌ها و تعداد المان‌ها تغییر کنند. با توجه به اینکه در مرحله اول اجرای برنامه فرمول‌بندی تابع پواسون جریان به کار برده شد، پس شرایط مرزی براساس تابع جریان تعریف شد. معادله‌های ۱۰ تا ۱۳ شرایط مرزی تعریف شده در برنامه کامپیوتری را براساس شکل ۳ نشان می‌دهند.

$$S_1: \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (10)$$

$$S_2: \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (11)$$

$$S_3: \psi = 0 \quad (12)$$

$$S_4: \psi = q = 6.15 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m} \quad (13)$$



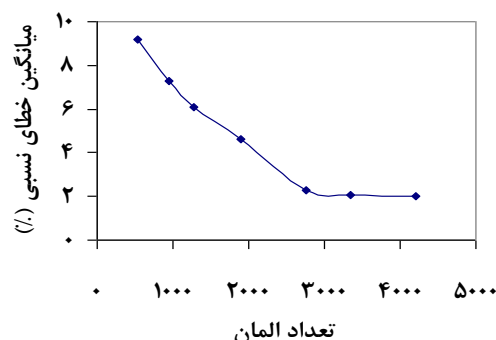
شکل ۳- مدل شبکه‌بندی شده سرریز به همراه شرایط مرزی

برطبق شکل ۳ در مرزهای  $S_1$  و  $S_2$  که به ترتیب مرزهای بالادست و پایین‌دست هستند، توزیع سرعت در مقطع به صورت یکنواخت فرض شد، ضمن اینکه توزیع فشار به صورت هیدرواستاتیک در نظر گرفته شد. همچنین مرزهای  $S_3$  و  $S_4$  که به ترتیب مرز جامد و مرز سطح آزاد جریان هستند، هرکدام یک خط جریان محسوب شدند. پس از اعمال شرایط مرزی و حل تابع پواسون جریان، مقادیر  $u$  و  $v$  (مؤلفه سرعت در جهت‌های  $x$  و  $y$ ) محاسبه شده و سرعت کل جریان از معادله ۱۴ به دست آمد.

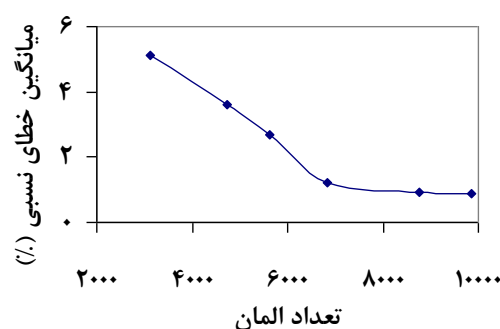
$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (14)$$

همان‌طور که اشاره شد در روش حجم محدود مقادیر سرعت جریان از حل معادلات آشفتگی به دست آمده‌اند. اما در روش المان محدود این مقادیر با حل معادله پواسون جریان محاسبه شده‌اند. برای به دست آوردن توابع پواسون جریان و فشار فرض شد که جریان غیرچرخشی بوده و از سوی دیگر برای مرزهای بالادست و پایین‌دست ( $S_1$  و  $S_2$ ) در شکل ۳) خط‌های جریان به صورت موازی و توزیع فشار، هیدرواستاتیک در نظر گرفته شد. در صورتی که در قسمت تاج و پایین‌دست سرریز، خط‌های جریان موازی نبوده و انحنای زیاد دارد که موجب ایجاد مؤلفه شتاب می‌شود و باعث ایجاد نیروی گریز از مرکز که عمود بر جهت جریان است، می‌شود. بنابراین در قسمت انحنا دار سرریز فرضیه‌های اعمال شده در جریان‌های پتانسیلی نادرست بوده و باعث افزایش RE روش المان محدود در محاسبه سرعت شده است. از سوی دیگر همان‌طور که دیده می‌شود در کلیه نقاط (به غیر از نقاط ۱ تا ۴) مقادیر محاسباتی سرعت جریان با روش المان محدود بیشتر از مقادیر اندازه‌گیری شده تخمین زده شده است که دلیل آن در نظر گرفته نشدن استهلاک انرژی جنبشی در تابع پواسون جریان است. به عبارت دیگر تابع جریان در تحلیل مناطقی که آشفتگی جریان زیاد است، عملکرد به نسبت ضعیفی دارد. همچنین در روش حجم محدود برای تحلیل آشفتگی از مدل  $k-\epsilon$  شامل مدل‌های استاندارد، RNG و Realizable استفاده شد و بعد از استخراج نتایج و مقایسه آن‌ها با مقادیر اندازه‌گیری شده مدل RNG به دلیل اینکه جریان‌های چرخشی را بهتر مدل می‌کند، نسبت به دو مدل دیگر عملکرد بهتری از خود نشان داد و از این نظر با نتیجه به دست آمده در پژوهش درگاهی (۲۰۰۶) هماهنگی دارد. پس کلیه مقادیر ذکر شده در روش حجم محدود، نتایج حاصل از به کارگیری مدل RNG هستند. از سوی دیگر نوساناتی که در خطای محاسباتی سرعت مشاهده می‌شود به این دلیل است که در روش المان محدود مقادیر سرعت جریان از حل معادله پواسون محاسبه شده‌اند و برای به دست آمدن تابع پواسون با حذف لزجت سیال، از تنش‌های رینولدز صرفه‌نظر شده است. این در حالی است که روی قسمت انحنا دار سرریز، لزجت سیال روی شرایط جریان تأثیرگذار است. به همین دلیل دامنه نوسانات خطای روش المان محدود بیشتر است. اما در روش حجم محدود، مقادیر سرعت جریان از

سوی دیگر با توجه به اینکه با افزایش تعداد المان‌ها مدت زمان لازم برای انجام محاسبات و اجرای مدل نیز افزایش می‌یابد، پس آرایش شبکه به گونه‌ای طراحی شد که بسته به میزان حساسیت نواحی حل از المان‌ها با اندازه‌های متفاوت استفاده شد.



شکل ۴- میانگین خطای نسبی روش المان محدود در تعیین سرعت نسبت به تعداد المان



شکل ۵- میانگین خطای نسبی روش حجم محدود در تعیین سرعت نسبت به تعداد المان

در جدول ۲ مقادیر اندازه‌گیری شده سرعت جریان سطح آزاد آب و مقادیر محاسباتی آن با مدل‌های عددی به همراه RE آن‌ها آمده است. همچنین کلیه مقادیر ذکر شده، نتایج محاسباتی مدل‌های عددی در حالت مستقل از شبکه است. همان‌طور که دیده می‌شود میزان خطای محاسباتی هر دو مدل در قسمت بالادست سرریز کم بوده اما با نزدیک شدن جریان به روی تاج و پایین‌دست سرریز مقدار خطا افزایش یافته است. حداکثر خطای محاسباتی سرعت در روش المان محدود مربوط به نقطه شماره ۱۱ با مقدار  $4/73\%$  و در روش حجم محدود مربوط به نقطه شماره ۹ با مقدار  $1/71\%$  به دست آمد. همچنین میانگین درصد خطای نسبی روش حجم محدود کمتر از روش المان محدود شده است.

حل معادله آشفستگی  $k-\varepsilon$  محاسبه شده‌اند و در نتیجه حل معادلات  $k$  و  $\varepsilon$  پارامتر لزجت گردابه‌ی نیز به صورت غیرمستقیم شبیه‌سازی می‌شود. به همین خاطر دامنه نوسانات خطای روش حجم محدود نسبت به المان محدود کمتر است.

جدول ۲- مقادیر سرعت اندازه‌گیری شده و محاسباتی به همراه RE

| شماره نقاط            | فاصله طولی نسبت به مبدأ (متر) | مقادیر سرعت اندازه‌گیری شده (متر در ثانیه) | مقادیر سرعت المان محدود (متر در ثانیه) | خطای نسبی المان محدود (درصد) | مقادیر سرعت حجم محدود (متر در ثانیه) | خطای نسبی حجم محدود (درصد) |
|-----------------------|-------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| ۱                     | ۰/۰۰                          | ۰/۸۸                                       | ۰/۸۸                                   | ۰/۰۰                         | ۰/۸۸                                 | ۰/۰۰                       |
| ۲                     | ۱/۹۰                          | ۰/۸۸                                       | ۰/۸۸                                   | ۰/۰۰                         | ۰/۸۸                                 | ۰/۰۰                       |
| ۳                     | ۳/۷۹                          | ۰/۸۸                                       | ۰/۸۸                                   | ۰/۰۰                         | ۰/۸۸                                 | ۰/۰۰                       |
| ۴                     | ۵/۶۸                          | ۰/۸۸                                       | ۰/۸۸                                   | ۰/۰۰                         | ۰/۸۸                                 | ۰/۰۰                       |
| ۵                     | ۷/۵۷                          | ۰/۹۲                                       | ۰/۹۳                                   | ۱/۰۹                         | ۰/۹۲                                 | ۰/۰۰                       |
| ۶                     | ۹/۴۵                          | ۱/۰۲                                       | ۱/۰۳                                   | ۰/۹۸                         | ۱/۰۱                                 | ۰/۹۸                       |
| ۷                     | ۱۱/۳۴                         | ۱/۲۸                                       | ۱/۳۱                                   | ۲/۳۴                         | ۱/۳۰                                 | ۱/۵۶                       |
| ۸                     | ۱۳/۲۲                         | ۱/۶۰                                       | ۱/۶۴                                   | ۲/۵۰                         | ۱/۵۸                                 | ۱/۲۵                       |
| ۹                     | ۱۵/۱۰                         | ۳/۵۱                                       | ۳/۶۰                                   | ۲/۵۶                         | ۳/۵۷                                 | ۱/۷۱                       |
| ۱۰                    | ۱۶/۳۲                         | ۴/۱۸                                       | ۴/۳۲                                   | ۳/۳۵                         | ۴/۱۲                                 | ۱/۴۴                       |
| ۱۱                    | ۱۷/۳۱                         | ۴/۶۵                                       | ۴/۸۷                                   | ۴/۷۳                         | ۴/۵۹                                 | ۱/۲۹                       |
| ۱۲                    | ۱۸/۰۹                         | ۴/۸۵                                       | ۵/۰۴                                   | ۳/۹۲                         | ۴/۷۹                                 | ۱/۲۴                       |
| ۱۳                    | ۱۸/۶۶                         | ۵/۰۱                                       | ۵/۱۶                                   | ۲/۹۹                         | ۵/۰۸                                 | ۱/۴۰                       |
| ۱۴                    | ۱۹/۱۳                         | ۵/۵۳                                       | ۵/۷۲                                   | ۳/۴۴                         | ۵/۶۰                                 | ۱/۲۷                       |
| ۱۵                    | ۱۹/۵۴                         | ۶/۲۹                                       | ۶/۵۱                                   | ۳/۵۰                         | ۶/۲۰                                 | ۱/۴۳                       |
| ۱۶                    | ۱۹/۷۲                         | ۶/۷۰                                       | ۶/۸۴                                   | ۲/۰۹                         | ۶/۷۹                                 | ۱/۳۴                       |
| میانگین خطای نسبی (%) |                               |                                            |                                        | ۲/۰۹                         |                                      | ۰/۹۳                       |

(درگاهی، ۲۰۰۶). در شکل ۶ پروفیل سطح آزاد آب به ازای دبی طراحی ۶/۱۵ مترمکعب در ثانیه در واحد طول سرریز با مقادیر اندازه‌گیری شده و محاسباتی ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود پروفیل سطح آزاد به دست آمده از هر دو مدل عددی در قسمت بالادست سرریز در مقایسه با مقادیر اندازه‌گیری شده آن از هماهنگی زیادی دارد. اما با نزدیک شدن جریان به تاج سرریز و ریزش از روی آن بر شدت تلاطم جریان افزوده شده و از دقت مدل‌های عددی در تعیین موقعیت سطح آزاد آب کم شده است. در این حالت نیز میانگین RE روش حجم محدود کمتر از روش المان محدود حاصل شده است و به عبارت دیگر مدل حجم سیال در تعیین پروفیل سطح آزاد عملکرد به نسبت بهتری داشته است.

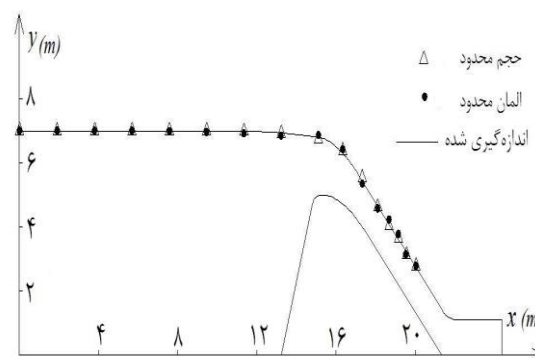
در جدول ۳ مقادیر اندازه‌گیری شده و عددی عمق جریان به همراه RE آمده است. حداکثر خطای محاسباتی پروفیل سطح آزاد آب در روش المان محدود مربوط به نقطه شماره ۱۴ با مقدار ۲/۷۰٪ و در روش حجم محدود مربوط به نقطه شماره ۱۶ با مقدار ۲/۱۵٪ به دست آمد. همان‌طور اشاره شد در برنامه کامپیوتری روش المان محدود برای تعیین پروفیل سطح آزاد آب در ابتدا موقعیت آن فرض شده و در هر تکرار پس از اعمال شرایط مرزی و حل معادله پواسون فشار در کل شبکه، مقادیر سرعت و فشار نسبی روی این سطح بررسی شد. با نزدیک شدن به سطح آزاد واقعی عمل تکرار قطع شده و نتایج حاصل از آخرین تکرار به‌عنوان جواب مسأله در نظر گرفته شد. در روش حجم محدود برای شبیه‌سازی جریان دو فازی آب و هوا از مدل حجم سیال استفاده شد. همچنین مقدار VOF برای تعیین موقعیت سطح آزاد آب ۰/۵ در نظر گرفته شد

جدول ۳- مقادیر عمق اندازه‌گیری شده و محاسباتی به همراه RE

| شماره نقاط | فاصله طولی<br>نسبت به مبدأ<br>(متر) | مقادیر عمق<br>اندازه‌گیری شده<br>(متر) | مقادیر عمق<br>المان محدود<br>(متر) | خطای نسبی<br>المان محدود<br>(درصد) | مقادیر عمق حجم<br>محدود<br>(متر) | خطای نسبی<br>حجم محدود<br>(درصد) |
|------------|-------------------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| ۱          | ۰/۰۰                                | ۷/۰۰                                   | ۷/۰۰                               | ۰/۰۰                               | ۷/۰۰                             | ۰/۰۰                             |
| ۲          | ۱/۹۰                                | ۷/۰۰                                   | ۷/۰۰                               | ۰/۰۰                               | ۷/۰۰                             | ۰/۰۰                             |
| ۳          | ۳/۷۹                                | ۷/۰۰                                   | ۷/۰۰                               | ۰/۰۰                               | ۷/۰۰                             | ۰/۰۰                             |
| ۴          | ۵/۶۸                                | ۷/۰۰                                   | ۷/۰۰                               | ۰/۰۰                               | ۷/۰۰                             | ۰/۰۰                             |
| ۵          | ۷/۵۷                                | ۷/۰۰                                   | ۶/۹۸                               | ۰/۲۹                               | ۶/۹۹                             | ۰/۱۴                             |
| ۶          | ۹/۴۵                                | ۷/۰۰                                   | ۶/۹۶                               | ۰/۵۷                               | ۶/۹۹                             | ۰/۱۴                             |
| ۷          | ۱۱/۳۴                               | ۶/۹۹                                   | ۶/۹۵                               | ۰/۵۷                               | ۶/۹۸                             | ۰/۱۴                             |
| ۸          | ۱۳/۲۲                               | ۶/۹۲                                   | ۶/۸۷                               | ۰/۸۰                               | ۶/۹۰                             | ۰/۳۲                             |
| ۹          | ۱۵/۱۰                               | ۱/۷۲                                   | ۱/۷۵                               | ۱/۷۴                               | ۱/۷۳                             | ۰/۵۸                             |
| ۱۰         | ۱۶/۳۲                               | ۱/۴۷                                   | ۱/۵                                | ۲/۰۴                               | ۱/۴۹                             | ۱/۳۶                             |
| ۱۱         | ۱۷/۳۱                               | ۱/۳                                    | ۱/۲۷                               | ۲/۳۱                               | ۱/۳۲                             | ۱/۵۴                             |
| ۱۲         | ۱۸/۰۹                               | ۱/۲۶                                   | ۱/۲۳                               | ۲/۳۸                               | ۱/۲۴                             | ۱/۵۹                             |
| ۱۳         | ۱۸/۶۶                               | ۱/۲۲                                   | ۱/۲۵                               | ۲/۴۶                               | ۱/۲۰                             | ۱/۶۴                             |
| ۱۴         | ۱۹/۱۳                               | ۱/۱۱                                   | ۱/۱۴                               | ۲/۷۰                               | ۱/۱۲                             | ۰/۹۰                             |
| ۱۵         | ۱۹/۵۴                               | ۰/۹۹                                   | ۰/۹۷                               | ۲/۰۲                               | ۰/۹۸                             | ۱/۰۱                             |
| ۱۶         | ۱۹/۷۲                               | ۰/۹۳                                   | ۰/۹۵                               | ۲/۱۵                               | ۰/۹۵                             | ۲/۱۵                             |
|            |                                     |                                        |                                    | ۱/۲۵                               |                                  |                                  |
|            |                                     |                                        |                                    | ۰/۷۲                               |                                  |                                  |

میانگین خطای نسبی (٪)

نیز براساس گسسته‌سازی و حل معادلات پواسون جریان و فشار به روش المان محدود گالرکین تنظیم شده بود. بعد از اجرای مدل‌های عددی پارامترهای عمق و سرعت جریان در نقطه‌های مشخص استخراج و با مقادیر اندازه‌گیری شده مقایسه شد. میانگین RE محاسبه سرعت به ازای روش‌های المان محدود و حجم محدود به ترتیب ۰/۹۳٪ و ۰/۷۲٪ و نیز میانگین درصد خطای نسبی محاسبه پروفیل سطح آزاد آب به ازای روش‌های مذکور به ترتیب ۱/۲۵٪ و ۰/۷۲٪ به دست آمد. نتایج مذکور نشان می‌دهد هر دو مدل عددی در محاسبه پروفیل سطح آزاد آب عملکرد خوبی داشته‌اند. از عامل‌های تأثیرگذار بر خطای هر دو مدل در محاسبه سرعت می‌توان به استفاده از مولینه برای اندازه‌گیری سرعت جریان در مدل واقعی اشاره کرد. شاید استفاده از ابزار دقیق برای اندازه‌گیری سرعت می‌توانست امکان مقایسه دقیق‌تری را میان نتایج مدل‌های عددی با مقادیر اندازه‌گیری شده فراهم کند. از سوی دیگر مقادیر محاسبه شده پروفیل سطح آزاد و سرعت جریان با هر دو مدل عددی در قسمت بالادست سرریز هماهنگی خوبی با مقادیر اندازه‌گیری شده داشت اما به تدریج و با نزدیک شدن جریان به قسمت تاج و



شکل ۶- پروفیل سطح آزاد آب به ازای مقادیر اندازه‌گیری شده و محاسباتی

### نتیجه‌گیری

این پژوهش برای شبیه‌سازی دو بعدی جریان روی سرریز اوجی از روش‌های المان محدود و حجم محدود استفاده شد. برای به کارگیری روش حجم محدود از نرم‌افزار FLUENT و برای به کارگیری روش المان محدود گالرکین از برنامه کامپیوتری که در محیط فرترن ۹۰ تهیه شده بود، استفاده شد. در محیط FLUENT برای تحلیل آشفتگی از مدل RNG و برای شبیه‌سازی جریان ۲ فاز از مدل حجم سیال استفاده شد. برنامه کامپیوتری فرترن

پایین دست سرریز خطای محاسباتی مدل‌ها افزایش یافت. در این میان، خطای محاسباتی روش المان محدود در نواحی مذکور بیشتر بود و عملکرد به نسبت ضعیفی داشت که از عوامل مؤثر بر آن می‌توان به نادرستی فرضیه‌های اعمال شده در جریان‌های پتانسیلی قسمت تاج و پایین دست سرریز اشاره کرد. پس می‌توان نتیجه‌گیری کرد برای شبیه‌سازی منطقه‌هایی که دارای انحنا بوده و آشفتگی جریان زیاد است، استفاده از مدل‌های آشفتگی عملکرد بهتری به همراه خواهد داشت.

### منابع

۱. حسنی ع. ۱۳۸۲. تحلیل جریان پتانسیلی روی سرریز با استفاده از روش بهینه‌سازی ریاضی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. دانشگاه علم و صنعت. ۷۷ ص.
۲. کریمی م. و موسوی جهرمی ح. ۱۳۸۹. تشخیص رژیم‌های جریان بر روی سرریز پلکانی با استفاده از ANSYS مجموعه مقالات نهمین کنفرانس هیدرولیک. دانشگاه تربیت مدرس.
3. Cassidy J. J. 1965. Irrotational flow over spillways of finite height. *Journal of Engineering Mechanics Division*. 91(6):155-173.
4. Chatila J. and Tabbara M. 2004. Computational modeling of flow over an ogee spillway. *Journal of computers and structures*. 82:1805-1812.
5. Dargahi B. 2006. Experimental study and 3D numerical simulations for a free over flow spillway. *Journal of Hydraulic Engineering*. ASCE. 132:899-907.
6. Ferrari A. 2010. SPH simulation of free surface flow over a sharp-crested weir. *Advances in Water Resources*. 33:270-276.
7. Ferziger J. H. and Peric M. 2002. *Computational methods for fluid dynamics*. Third edition, Springer publisher. 431 p.
8. Henderson H. C. Kok M. and Dekoning W. L. 1991. Computer-aided spillway design using the boundary element method and non-linear programming. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*. 13:625-641.
9. Savage B. M. and Johnson C. 2001. Flow over ogee spillway: Physical and numerical model case study. *Journal of Hydraulic Engineering*. ASCE. 127(8):640-649.
10. Tabbara M. Chatila J. and Awwad R. 2005. Computational simulation of flow over stepped spillways. *Journal of Computers and Structures*. 83:2215-2224.

