

## ارزیابی معادلات توزیع غلظت رسوبات معلق در کانال‌های باز

محسن نصرآبادی<sup>۱\*</sup>، صالح ریاحی<sup>۲</sup> و حسین صمدی بروجنی<sup>۳</sup>

### چکیده

آگاهی از نحوه توزیع رسوبات معلق برای محاسبه میزان دبی بار معلق در آبراهه‌ها مهم است، به این دلیل که در جریان‌های آبرفتی با عمق زیاد، به طور تقریبی ۸۰ درصد کل بار رسوبی را رسوبات معلق تشکیل می‌دهند. تاکنون رابطه‌های زیادی برای برآورد توزیع غلظت رسوبات معلق در مجاری باز توسط پژوهشگران مختلف توسعه یافته است. در این پژوهش، ضمن تحلیل و بررسی کامل این معادلات، با استفاده از مهم‌ترین شاخص‌های آماری ارائه شده، معادله بهینه از میان ۹ معادله تجربی مورد بررسی انتخاب شده است. برای واسنجی عملکرد هر یک از این معادلات، از معتبرترین داده‌های آزمایشگاهی موجود استفاده شده است. نتایج این پژوهش بیانگر این است که معادله اینشتین و شن (۱۹۵۲) با  $EF=0/988$ ،  $R^2=0/988$ ،  $RMSE=0/048$  و  $ME=0/086$  دارای دقت خوبی در تخمین توزیع غلظت رسوبات معلق است و بیشترین تطابق را با داده‌های آزمایشگاهی دارد. در عوض، معادلات مک‌تیگو و ویلیس برای داده‌های مورد استفاده کم دقت‌ترین معادلات هستند و استفاده از آن‌ها توصیه نمی‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** تحلیل آماری، توزیع غلظت رسوبات معلق، دبی بار معلق، معادله راوس.

**ارجاع:** نصرآبادی م. ریاحی ص. و صمدی بروجنی ح. ۱۳۹۳. ارزیابی معادلات توزیع غلظت رسوبات معلق در کانال‌های باز. مجله پژوهش آب ایران. ۸(۱۴):۱۷۵-۱۸۵.

۱- دانشجوی دکتری سازه‌های آبی، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشگاه تهران.

۲- دانشجوی دکتری سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس.

۳- دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد.

\* نویسنده مسئول: [nasrabadi@ut.ac.ir](mailto:nasrabadi@ut.ac.ir)

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۰۵/۰۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۰۲/۱۱

## مقدمه

آگاهی از نحوه توزیع رسوبات معلق برای محاسبه میزان دبی بار معلق در مجاری باز از اهمیت زیادی دارد، به دلیل این که به طور تقریبی ۸۰ درصد از کل بار رسوبی آبراهه را رسوبات معلق تشکیل می‌دهد. برای تعیین دبی بار معلق از معادله زیر استفاده می‌شود:

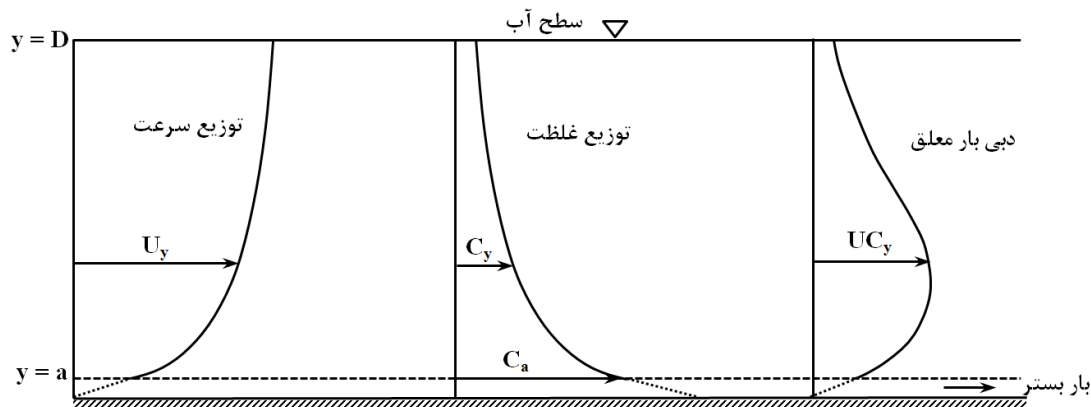
$$q_s = \int_a^D UC dy \quad (1)$$

در این معادله،  $q_s$  دبی رسوبات معلق،  $a$  ارتفاعی از بستر کانال که از آن ارتفاع به بعد، رسوبات به صورت معلق حرکت می‌کنند (شکل ۱)،  $D$  عمق جریان،  $U$  سرعت جریان در فاصله  $y$  در بالای بستر و  $C$  غلظت رسوبات در این نقطه است. با توجه به این رابطه، آگاهی از توزیع عمقی سرعت و غلظت رسوبات معلق در محاسبه دبی بار معلق جریان مهم است. اولین معادله برای برآورد توزیع

غلظت رسوبات معلق در کانال‌های باز توسط راوس (۱۹۳۷) توسعه یافت. وی از معادله پخش ارائه شده توسط ویلیام اشمیت (۱۹۲۵) (نونو، ۱۹۴۶) برای جریان‌های دو بعدی یکنواخت و ماندگار استفاده کرد. معادله پخش اشمیت به صورت زیر است:

$$C \omega_s + \varepsilon_s \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

در این معادله،  $\omega_s$  سرعت ته‌نشینی رسوبات،  $\varepsilon_s$  ضریب پخش رسوبات و  $C$  غلظت رسوبات معلق در ارتفاع  $y$  از بستر است. عبارت اول معادله ۲ نشان‌دهنده میزان رسوباتی است که در واحد سطح ته‌نشین می‌شوند و عبارت دوم بیانگر مقدار رسوباتی است که در اثر جریان‌های متلاطم به طرف بالا از واحد سطح عبور می‌کنند.



شکل ۱- منحنی توزیع سرعت، توزیع غلظت و دبی رسوبات معلق

$$z = \frac{w_s}{\beta k U_*} \quad (4)$$

در این معادله،  $\beta = \varepsilon_s / \varepsilon_m$  ضریبی است که براساس نظر بیشتر پژوهشگران به طور تقریبی برابر با یک است که نشان‌دهنده برابری ضریب پخش رسوبات و ضریب پخش جریان خواهد بود (شفاعی بجستان، ۱۳۸۷). وَن‌راین (۱۹۹۳) محدوده این ضریب را بین ۱ تا ۳ و معادله زیر برای محاسبه این پارامتر ارائه کرد:

$$\beta = 1 + 2 \left( \frac{w_s}{U_*} \right)^2 \quad \text{for } 0 < \frac{w_s}{U_*} < 1 \quad (5)$$

در صورت استفاده از معادله ۵، تا حدود  $\pm 2$  خطا در برآورد غلظت در هر نقطه ایجاد خواهد شد،  $k$  ضریب

راوس با استفاده از رابطه تنش برشی در جریان متلاطم و همچنین با استفاده از تئوری طول اختلاط و ن‌کارمن-پرناتل و استفاده از توزیع لگاریتمی سرعت، معادله زیر را برای اندازه‌گیری توزیع غلظت رسوبات معلق در کانال‌های باز ارائه کرد (امید و نصرآبادی، ۱۳۹۱):

$$\frac{C}{C_a} = \left( \frac{D-y}{y} \frac{a}{D-a} \right)^z \quad (3)$$

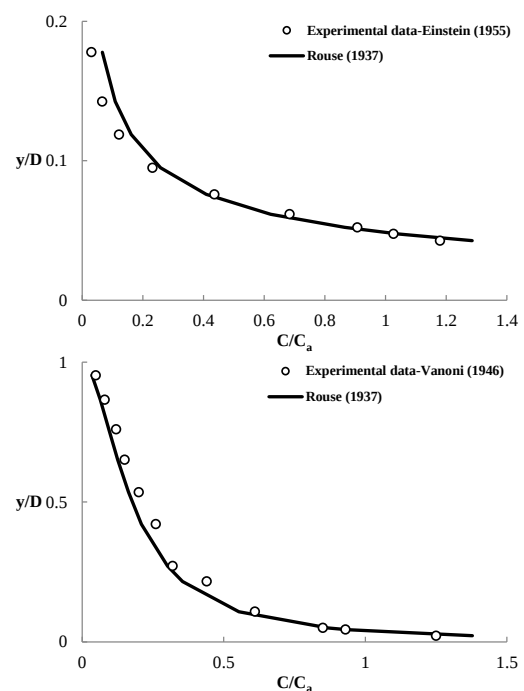
در این معادله، که به معادله راوس معروف است،  $D$  عمق جریان،  $C_a$  غلظت جریان در ارتفاع اختیاری  $y=a$  (ارتفاع مرجع) و  $z$  عدد تعلیق یا عدد راوس نام دارد و به صورت زیر تعیین می‌شود:

گفتنی است که تمامی معادلاتی که در این پژوهش بررسی شده‌اند، معادلاتی هستند که به صورت تجربی و با در نظر گرفتن فرضیات مختلف توسعه یافته‌اند. همچنین تمامی معادلات بررسی شده با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی استخراج شده‌اند.

مطالعات عددی و تئوری توسط پژوهشگران مختلف انجام شده‌اند که از بحث این پژوهش خارج است. از جمله مطالعاتی که به بررسی و ارزیابی معادلات استخراج شده با استفاده از داده‌های صحرایی (رودخانه) پرداخته‌اند، می‌توان به مطالعه محمودیان شوشتری و نیکانفر (۱۳۸۱) اشاره کرد. آن‌ها روش‌های برآورد میزان بار معلق (روش‌های لین و کالینسکی، اینشتین، چانگ و همکاران، بروکس، بگنولد، ساماگا، ون‌راین، سلیک و رادی، سوامی و اوجا) در کانال‌های شبکه آبیاری و زهکشی حمیدیه و قدس واقع در استان خوزستان را مقایسه و ارزیابی کردند و به این نتیجه رسیدند که روش‌های بروکس، چانگ و همکاران، لین و کالینسکی و ون‌راین برآورد بهتری را نتیجه می‌دهند (محمودیان شوشتری و نیکانفر، ۱۳۸۱).

از جمله مطالعات عددی می‌توان به مطالعه یومیاما (۱۹۹۲) و (۱۹۹۹) اشاره کرد. وی با در نظر گرفتن فرضیه‌ای جدید برای طول اختلاط در جریان حاوی رسوبات معلق، یک راه حل تحلیلی و ریاضی برای توزیع سرعت و غلظت رسوبات معلق ارائه داد. وی راه حل محاسباتی خود را با داده‌های ونونی و اینشتین مقایسه کرد و به این نتیجه رسید که این راه حل فقط برای رسوبات با قطر ۰/۹۴ تا ۱/۳ میلی‌متر با داده‌های آزمایشگاهی مطابقت دارد. تسایی و تسایی (۲۰۰۰) با استفاده از روش عددی تفاضل محدود، توزیع سرعت و غلظت رسوبات معلق را محاسبه کردند و هماهنگی خوبی با داده‌های آزمایشگاهی به دست آوردند. کینگ‌کوان لیو و همکاران (۲۰۰۷) با بررسی تئوری توزیع غلظت رسوبات معلق، رابطه‌ای بین توزیع عمودی غلظت رسوبات و شدت نوسانات عمودی ذرات به دست آوردند. نی و وانگ (۱۹۹۱) یک مدل تئوری برای محاسبه توزیع غلظت رسوبات معلق و مازومدر و گوشال (۲۰۰۶) یک مدل تئوری برای محاسبه توزیع سرعت و غلظت رسوبات معلق ارائه کردند. تمامی مدل‌ها و معادلاتی که با استفاده از روش‌های عددی و تئوری به دست آمده‌اند، دقت خوبی در برآورد توزیع غلظت دارند. اما از عیب‌های اصلی این مطالعات، می‌توان به محاسبات زیاد، طولانی بودن رابطه‌ها

ون‌کارمن است و برای جریان آب معادل با ۰/۴ در نظر گرفته می‌شود. ونونی (۱۹۷۵) به این نتیجه رسید که در جریان‌های حاوی رسوبات معلق، با افزایش غلظت رسوبات، مقدار این پارامتر کمتر از ۰/۴ خواهد شد، اما در نظر گرفتن مقدار ۰/۴ برای ضریب ون‌کارمن خطای زیادی در محاسبات ایجاد نمی‌کند.  $U^*$  سرعت برشی جریان در نزدیکی بستر و  $\omega_s$  سرعت سقوط ذرات رسوب است. در حال حاضر، بیشتر پژوهشگران از معادله راوس برای محاسبه توزیع غلظت رسوبات معلق استفاده می‌کنند. هوانگ و همکاران (۲۰۰۸) دو عیب اساسی معادله راوس را خاطر نشان کردند. اول این که این معادله مقدار غلظت جریان در نزدیکی کف را بیش از حد برآورد می‌کند (شکل ۲)، و دوم اینکه غلظت جریان در سطح آب ( $y=D$ ) را برابر با صفر نشان می‌دهد (رابطه ۳). در شکل ۲ نمونه‌ای از مقادیر محاسبه شده با معادله راوس با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده است.



شکل ۲- مقایسه مقادیر محاسبه شده توسط معادله راوس با داده‌های آزمایشگاهی

معایب معادله راوس باعث شد که پژوهشگران مختلف با در نظر گرفتن فرضیات مختلف معادلات تجربی برای اندازه‌گیری دقیق‌تر توزیع غلظت رسوبات معلق ارائه دهند. در این پژوهش، تمامی این معادلات بررسی شده‌اند و با استفاده از تحلیل آماری، بهترین معادله انتخاب شده است.

معادله تاناکا و سوگیموتو (۱۹۵۸): آن‌ها با رد تئوری کارمن-پرناتل که بر این فرض استوار بود که  $\tau = \tau_0$  و با استفاده از تغییرات واقعی  $\tau$  با  $y$ ، یک معادله جدید برای  $du/dy$  به دست آوردند و معادله راوس را به صورت زیر اصلاح کردند:

$$\frac{C}{C_a} = \left[ \left( \frac{\sqrt{D} + \sqrt{D-y}}{\sqrt{D} - \sqrt{D-y}} \right) \left( \frac{\sqrt{D} - \sqrt{D-a}}{\sqrt{D} + \sqrt{D-a}} \right) \right]^{u_{*k} w_s} \quad (7)$$

معادله چانگ و همکاران (۱۹۶۵): آن‌ها با فرض  $\beta = 1$  معادله زیر را ارائه دادند:

$$\frac{C}{C_a} = A_1 \left[ -\frac{\xi^{0.5}}{1 - (1 - \xi)^{0.5}} \right]^{z_2} \quad (8)$$

در این معادله:

$$A_1 = \left[ -\frac{1 - (1 - \xi_a)^{0.5}}{\xi_a^{0.5}} \right]^{z_2} \quad (9)$$

$$z_2 = \frac{2\omega_s}{\beta U_* k} \quad (10)$$

در این معادله،  $\xi = y/D$  و  $\xi_a = a/D$  به ترتیب ارتفاع بدون بعد جریان و ارتفاع بدون بعد مرجع هستند. ویلیس (۱۹۷۹): با فرض  $\varepsilon_s = \varepsilon_m$  و همچنین در نظر گرفتن رابطه  $\varepsilon_m$  به صورت زیر، معادله ۱۳ را برای برآورد توزیع غلظت ارائه داد:

$$\frac{6\varepsilon_m}{ku_* D} = \sqrt{2} e^{-P^2/2} \quad (11)$$

در این رابطه، مقدار  $P$  و  $P_a$  به ترتیب در ارتفاع  $y$  و  $a$  با استفاده از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{y}{D} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^P e^{-r^2/2} dr \quad (12)$$

در نتیجه آن‌ها معادله زیر را برای محاسبه توزیع غلظت رسوبات معلق ارائه دادند:

$$\frac{C}{C_a} = e^{-(3/\sqrt{\pi})(P - P_a)(\omega_s/U_* k)} \quad (13)$$

در این پژوهش، برای حل معادله ۱۳ از تئوری تابع خطا استفاده شده است، که برای حل این تابع می‌توان آن را به صورت زیر تخمین زد:

$$\frac{y}{D} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{P}{\sqrt{2}} \right) + 1 \right) \quad (14)$$

و در نتیجه غیرقابل استفاده بودن برای کاربران، سختی کار با این گونه مدل‌های غیرتجاری و عدم دسترسی به ریز اطلاعات مدل اشاره کرد.

## مواد و روش‌ها

### معادلات توسعه یافته

از آنجا که هدف اصلی از انجام این پژوهش، تعیین بهترین معادله تجربی برای توزیع غلظت رسوبات است، پس فقط به بررسی صحت معادلاتی پرداخته می‌شود که به صورت تجربی بعد از معادله راوس توسعه یافته‌اند. این معادلات عبارتند از: معادله اینشتین و شن (۱۹۵۲)، معادله تاناکا و سوگیموتو (۱۹۵۸)، معادله چانگ و همکاران (۱۹۶۵)، معادله ویلیس (۱۹۷۹)، معادله ایتاکورا و کیشی (۱۹۸۰)، معادله مک‌تیگو (۱۹۸۱)، معادله هارولد و لاول (۱۹۸۸)، معادله گری براون (۲۰۰۸). در زیر تمامی معادلات و فرضیات در نظر گرفته شده در توسعه هر کدام بیان شده است.

معادله اینشتین و شن (۱۹۵۲): اصلاحاتی را از نظر تئوری برای معادله راوس پیشنهاد کردند. اصلاحات مورد نظر همگی شامل تغییراتی در مفاهیم و جزئیات فرآیند تبادل تلاطم جریان است. آن‌ها فرض کردند که سیال و رسوب به طور عمودی از میان یک سطح افقی در ارتفاع  $y$  حرکت می‌کنند و این فاصله به طور تقریبی با طول اختلاط مساوی است. آن‌ها معادله زیر را برای این منظور ارائه کردند:

$$\frac{C}{C_a} = \left( \frac{1 - \sqrt{\frac{D-a}{D}}}{1 - \sqrt{\frac{D-y}{D}}} \right)^{\frac{z_1}{1+Nkz_1}} \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{D-a}{D}}}{1 + \sqrt{\frac{D-y}{D}}} \right)^{\frac{z_1}{1-Nkz_1}} \times \left( \frac{\sqrt{\frac{D-a}{D}} + Nkz_1}{\sqrt{\frac{D-y}{D}} + Nkz_1} \right)^{\frac{2z_1}{N^2 k^2 z_1^2 - 1}} \quad (6)$$

در این معادله،  $z_1 = \omega_s / (kU_*)$  عدد راوس (عدد تعلیق) با فرض  $\beta = 1$  و  $N = B_1(0.5 - A_1)$  است.  $A_1$  و  $B_1$  ثابت‌های عددی هستند و از داده‌های آزمایشگاهی به دست می‌آیند. این معادله به ازای مقادیر بسیار کم  $z$  همان معادله راوس خواهد بود.

$$E = Cw_s \quad (21)$$

در این رابطه،  $D' = 1/0.7D$  است. که این معادله به ازای  $D' = D$  همان معادله راوس خواهد بود.

معادله گری براون (۲۰۰۸): براون روشی جدید برای مشکل مدل سازی توزیع نامتعادل رسوبات توسعه داد. معادله زیر برای توزیع غلظت رسوبات معلق توسط گری براون ارائه شده است:

$$\frac{C}{C_a} = \left[ \frac{y}{D-y} \frac{D-a}{a} \right]^{-K} \quad (22)$$

$$K = \frac{1}{\beta_{ss} k} \frac{(1 + F_{v,a})}{\left( \frac{U_*}{\omega_s} + F_{v,a} \right)} \quad (23)$$

در این معادله،  $F_{v,a}$  شار نامتعادل عمودی بدون بعد رسوبات در نزدیک بستر است و برابر با  $f_{v,a}/v_a C_a$  خواهد بود.  $f_{v,a}$  شار نامتعادل عمودی رسوبات در نزدیک بستر بوده و برابر است با  $C_a w_s$ ،  $v_a$  سرعت در ارتفاع مرجع،  $\beta_{ss}$  برای جریان حاوی رس و سیلت برابر با ۱ و برای جریان حاوی ماسه از معادله ۵ (ون راین، ۱۹۹۳) محاسبه می شود. در صورتی که  $F_{v,a}$  برابر با صفر در نظر گرفته شود، معادله به معادله راوس تبدیل می شود. در جدول ۱ خلاصه و جزئیات معادلات بررسی شده در این پژوهش بیان شده است.

#### داده های آزمایشگاهی مورد استفاده

در این پژوهش برای مقایسه و ارزیابی صحت معادلات توسعه یافته توسط پژوهشگران مختلف، از داده های آزمایشگاهی ونونی (۱۹۴۶) و اینشتین (۱۹۵۵) استفاده شده است. این داده های آزمایشگاهی معتبرترین داده های موجود هستند که بیشتر پژوهشگران (هوانگ و همکاران، ۲۰۰۸؛ تسایی و تسایی، ۲۰۰۰ و گری، ۲۰۰۸) از این داده ها برای ارزیابی معادلات خود استفاده کرده اند. در جدول های ۲ و ۳ به ترتیب خلاصه داده ها و شرایط آزمایش های اینشتین و ونونی ارائه شده است. آزمایش های اینشتین در یک فلوم مستطیلی با عرض ۳۰/۷ سانتی متر، بستر صاف و شیب ۰/۰۱۸۵ تا ۰/۰۲۵ انجام شده است. وی از سه قطر ذره ۱/۳، ۰/۹۴ و ۰/۲۷۴ میلی متر استفاده کرد. آزمایش های ونونی در یک فلوم مستطیلی با عرض ۸۴/۵ سانتی متر، بستر زبر و شیب ثابت ۰/۰۲۵ انجام شده است. در تمامی آزمایش ها از ذرات رسوب با قطر متوسط ۰/۱، ۰/۱۳ و ۰/۱۶ میلی متر استفاده شده است.

$$erf(x) \approx 1 - \frac{1}{(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_6 x^6)} \quad (15)$$

در این معادله،  $a_1 = 0.070523$  و  $a_2 = 0.042282$  و  $a_3 = 0.00927$  و  $a_4 = 0.000152$  و  $a_5 = 0.000276$  و  $a_6 = 0.000043$  است. گفتنی است خطای محاسباتی با استفاده از این روش به طور تقریبی معادل  $3 \times 10^{-7}$  خواهد بود.

معادله ایتاکورا و کیشی (۱۹۸۰): آن ها با اشاره به اینکه معادله لگاریتمی برای توزیع سرعت در جریان های حاوی رسوبات معلق قابل کاربرد نیست، با استفاده از یک معادله نیمه تئوری برای توزیع سرعت به صورت زیر، معادله ۱۸ را برای محاسبه توزیع غلظت رسوبات معلق توسعه دادند:

$$\frac{U - U_{\max}}{U_*} = \frac{1}{k} \left[ \ln\left(\frac{y}{D}\right) + D_* \left( \frac{y}{D} - 1 \right) \right] \quad (16)$$

$$D_* = \frac{2.8 \Delta \gamma_s D \omega_s \bar{C}}{\rho_f U_*^2} \quad (17)$$

$$\frac{C}{C_a} = \left[ \left( \frac{D-y}{D-a} \right)^{1+D_*} \frac{a}{y} \right]^z \quad (18)$$

در این معادله،  $\Delta \gamma_s$  اختلاف وزن مخصوص سیال و رسوب،  $\bar{C}$  غلظت حجمی متوسط جریان و  $\rho_f$  جرم مخصوص سیال (آب) است.

معادله مک تیگو (۱۹۸۱): وی عمق جریان را به دو بخش ناحیه داخلی و ناحیه خارجی تقسیم کرد. لایه داخلی از بستر تا  $0.2D$  و لایه خارجی از  $0.2D$  تا سطح آب است. ضریب انتقال رسوبات  $\varepsilon_s$  در ناحیه خارجی برابر با  $k_1 U_* D$  و در ناحیه داخلی برابر با  $k_2 U_* D$  است. سپس معادله توزیع غلظت را برای هر دو ناحیه به صورت زیر توسعه داد:

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left[ - \frac{w_s}{k_1 U_* D} (y-a) \right] \quad \text{for } y \geq 0.2D \quad (19)$$

$$\frac{C}{C_a} = \left[ \frac{y}{a} \right]^{-\frac{w_s}{k_2 U_*}} \quad \text{for } y \leq 0.2D$$

معادله هارولد و لاول (۱۹۸۸): رابطه راوس را به صورت زیر اصلاح کرد:

$$C = \frac{E}{w_s} \left[ \frac{y (D'-a)}{a (D'-y)} \right]^{-\frac{w_s}{k U_*}} \quad (20)$$

محدوده مقادیر عمق جریان، سرعت برشی و غلظت در ارتفاع مرجع نیز در جدول‌ها آورده شده است. در واقع دلیل استفاده از دو سری داده آزمایشگاهی مختلف، واسنجی معادلات با تغییر شرایط آزمایشگاهی مختلف از قبیل تغییر در قطر متوسط رسوبات، شرایط بستر کانال، عرض و عمق جریان و محدوده غلظت رسوبات است.

جدول ۱- خلاصه و جزئیات فرمول‌های بررسی شده در این پژوهش

| ردیف | نام پژوهشگر       | سال ارائه | شرایط      | مرجع مربوطه              |
|------|-------------------|-----------|------------|--------------------------|
| ۱    | راوس              | ۱۹۳۶      | آزمایشگاهی | راوس (۱۹۳۶)              |
| ۲    | اینشتین و شن      | ۱۹۵۲      | آزمایشگاهی | اینشتین و شن (۱۹۵۲)      |
| ۳    | تاناکا و سوگیموتو | ۱۹۵۸      | آزمایشگاهی | گارد و رانگا راجو (۲۰۰۰) |
| ۴    | چانگ و همکاران    | ۱۹۶۵      | آزمایشگاهی | چانگ و همکاران (۱۹۶۵)    |
| ۵    | ویلیس             | ۱۹۷۹      | آزمایشگاهی | گارد و رانگا راجو (۲۰۰۰) |
| ۶    | ایتاکورا و کیشی   | ۱۹۸۰      | آزمایشگاهی | گارد و رانگا راجو (۲۰۰۰) |
| ۷    | مکتیگو            | ۱۹۸۱      | آزمایشگاهی | گارد و رانگا راجو (۲۰۰۰) |
| ۸    | هارولد و لاول     | ۱۹۸۸      | آزمایشگاهی | هارولد و لاول (۱۹۸۸)     |
| ۹    | گری براون         | ۲۰۰۸      | آزمایشگاهی | گری براون (۲۰۰۸)         |

جدول ۲- خلاصه داده‌ها و شرایط آزمایش‌های اینشتین و شن (۱۹۵۵)

| شماره آزمایش | D(cm) | U <sub>*</sub> (cm/s) | d <sub>50</sub> (mm) | C <sub>a</sub> (gr/lit) | نوع بستر |
|--------------|-------|-----------------------|----------------------|-------------------------|----------|
| S-1          | ۱۳/۷۸ | ۱۱/۴۸                 | ۱/۳                  | ۴۴/۴۴                   | صاف      |
| S-2          | ۱۱/۹۵ | ۱۲/۸۵                 | ۱/۳                  | ۱۶۴/۷۴                  | صاف      |
| S-3          | ۱۱/۶۴ | ۱۳/۲۷                 | ۱/۳                  | ۲۱۸/۵۲                  | صاف      |
| S-4          | ۱۱/۵۲ | ۱۴/۲۸                 | ۱/۳                  | ۳۷۳/۰۳                  | صاف      |
| S-5          | ۱۰/۹۷ | ۱۴/۵                  | ۱/۳                  | ۵۸۵/۸۴                  | صاف      |
| S-6          | ۱۴/۳  | ۱۱/۸۲                 | ۰/۹۴                 | ۲۱/۵۳                   | صاف      |
| S-7          | ۱۴/۲۳ | ۱۱/۷۳                 | ۰/۹۴                 | ۴۸/۴۲                   | صاف      |
| S-8          | ۱۳/۸۷ | ۱۱/۵۴                 | ۰/۹۴                 | ۵۶/۱۹                   | صاف      |
| S-9          | ۱۳/۵۳ | ۱۱/۸۶                 | ۰/۹۴                 | ۱۰۹/۴۹                  | صاف      |
| S-10         | ۱۳/۰۱ | ۱۲/۶                  | ۰/۹۴                 | ۱۸۳/۳۷                  | صاف      |
| S-11         | ۱۳/۲۶ | ۱۰/۵۸                 | ۰/۲۷۴                | ۲۱                      | صاف      |
| S-12         | ۱۳/۲  | ۱۰/۰۵                 | ۰/۲۷۴                | ۱۴۰                     | صاف      |
| S-13         | ۱۳/۴۱ | ۱۰/۴۳                 | ۰/۲۷۴                | ۲۲۵                     | صاف      |
| S-14         | ۱۲/۳۱ | ۱۲/۱۷                 | ۰/۲۷۴                | ۲۹۵                     | صاف      |
| S-15         | ۱۲/۴۴ | ۱۲                    | ۰/۲۷۴                | ۵۱۰                     | صاف      |
| S-16         | ۱۱/۸۹ | ۱۲/۴۵                 | ۰/۲۷۴                | ۵۲۰                     | صاف      |

جدول ۳- خلاصه داده‌ها و شرایط آزمایش‌های ونونی (۱۹۴۶)

| شماره آزمایش | D(cm) | U <sub>*</sub> (cm/s) | d <sub>50</sub> (mm) | C <sub>a</sub> (gr/lit) | نوع بستر |
|--------------|-------|-----------------------|----------------------|-------------------------|----------|
| Run-18       | ۱۴    | ۴/۱۵                  | ۰/۱                  | ۴/۷۸                    | زبر      |
| Run-19       | ۷/۲   | ۲/۹۷                  | ۰/۱                  | ۱/۲۹                    | زبر      |
| Run-20       | ۲۰    | ۵/۸۸                  | ۰/۱                  | ۴/۲۷                    | زبر      |
| Run-21       | ۷/۲   | ۴/۱۵                  | ۰/۱                  | ۳/۴۲                    | زبر      |
| Run-22       | ۹     | ۴/۶۹                  | ۰/۱                  | ۶/۷۵                    | زبر      |

## شاخص‌های ارزیابی معادلات

شاخص‌های ارزیابی مختلفی برای ارزیابی مدل‌ها وجود دارد. شاخص‌های آماری مورد استفاده عبارتند از خطای متوسط<sup>۱</sup> (AE)، خطای حداکثر<sup>۲</sup> (ME)، خطای ریشه حداقل مربعات<sup>۳</sup> (RMSE)، ضریب رگرسیون ( $R^2$ )، راندمان مدل<sup>۴</sup> (EF)، ضریب جرم باقیمانده<sup>۵</sup> (CRM) و ضریب تعیین (CD). معادلات زیر برای محاسبه هر کدام از این شاخص‌ها استفاده شده است (لوگیو و گرین، ۱۹۹۱).

$$AE = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - O_i)}{n} \quad (24)$$

$$ME = \max_{i=1}^n |O_i - P_i| \quad (25)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (P_i - O_i)^2}{n}} \quad (26)$$

$$R^2 = \left[ \frac{\sum_{t=1}^n (O_i^t - \bar{O}_i)(P_i^t - \bar{P}_i)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (O_i^t - \bar{O}_i)^2 \sum_{t=1}^n (P_i^t - \bar{P}_i)^2}} \right]^2 \quad (27)$$

$$EF = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O}_i)^2 - \sum_{i=1}^n (P_i - O_i)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O}_i)^2} \quad (28)$$

$$CRM = \frac{\sum_{i=1}^n O_i - \sum_{i=1}^n P_i}{\sum_{i=1}^n O_i} \quad (29)$$

$$CD = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2}{\sum_{i=1}^n (P_i - \bar{O})^2} \quad (30)$$

در این معادله‌ها،  $P_i$  مقادیر محاسبه شده،  $O_i$  مقادیر اندازه‌گیری شده،  $n$  تعداد نمونه‌های برداشت شده و  $\bar{O}$  مقدار متوسط اندازه‌گیری شده هستند. مقادیر مثبت و منفی شاخص AE به ترتیب نشان دهنده برآورد بیشتر و کمتر از مقدار واقعی است و هرچه مقدار این شاخص

کمتر باشد، بیانگر اطمینان‌پذیری معادله است. حداقل مقدار پارامتر ME صفر است و مقادیر زیاد این پارامتر بیانگر بدترین حالت کارکرد مدل خواهد بود. مقدار RMSE همواره مثبت است و با نزدیک شدن آن به صفر عملکرد رابطه مورد بررسی افزایش می‌یابد. مقدار RMSE خطای برآورد شده را در کل منحنی بیان می‌کند. شاخص EF مقادیر محاسبه شده را با مقادیر اندازه‌گیری شده مقایسه می‌کند. حداکثر مقدار برای این پارامتر ۱ است. مقادیر منفی بیانگر این است که میانگین مقادیر اندازه‌گیری شده، برآورد بهتری از مقادیر پیش‌بینی شده دارد. CRM شاخصی است که نشان دهنده میزان اختلاف میان مقادیر محاسبه شده و مقادیر اندازه‌گیری شده است. مقادیر منفی بیانگر تمایل مدل در برآورد مقادیر بیشتر از مقادیر اندازه‌گیری شده است. CD نشان دهنده نسبت پراکندگی میان مقادیر محاسبه شده به پراکندگی مقادیر اندازه‌گیری شده است. گفتنی است که چنانچه تمامی مقادیر اندازه‌گیری شده و محاسبه شده با یکدیگر برابر باشند، مقادیر عددی شاخص‌های RMSE، ME و CRM برابر با صفر و مقدار CD و EF برابر با ۱ خواهد بود.

## نتایج و بحث

توزیع غلظت اندازه‌گیری شده و محاسبه شده با هر یک از معادلات در شکل ۳ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادله مک‌تیگو (۱۹۸۱) برای داده‌های ونونی و معادله ویلیس (۱۹۷۹) برای داده‌های اینشتین، در اکثر موارد مقادیر واقعی غلظت را برآورد نمی‌کنند و دقت خوبی ندارند.

براساس شاخص‌های آماری محاسبه شده، به هر یک از معادلات امتیاز داده شد. به‌صورتی که به معادله‌ای که در آن هر یک از شاخص‌های آماری ME، RMSE، CRM حداقل یا EF و CD آن نزدیک به یک باشد، رتبه یک اختصاص داده شده است. پارامترهای آماری محاسبه شده مربوط به هر یک از معادلات و رتبه آن‌ها در جدول‌های ۴ و ۵ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای کلیه شاخص‌های آماری که مبنای ارزیابی قرار گرفتند، معادله اینشتین و شن (۱۹۵۲) با کسب رتبه ۱ نسبت به سایر معادلات برتری نسبی دارد. با توجه به رتبه‌بندی انجام شده، معادله مک‌تیگو (برای داده‌های ونونی) و معادله ویلیس (برای داده‌های اینشتین و شن) در رتبه

1- Average Error

2- Maximum Error

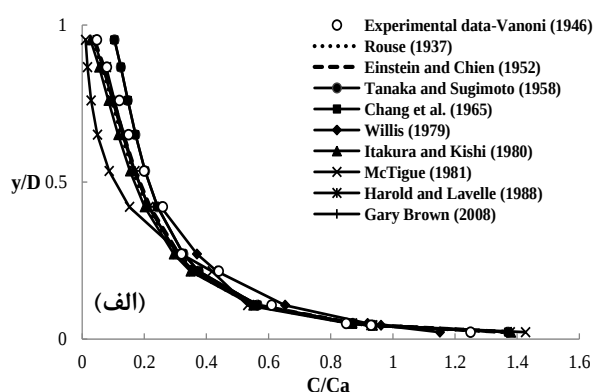
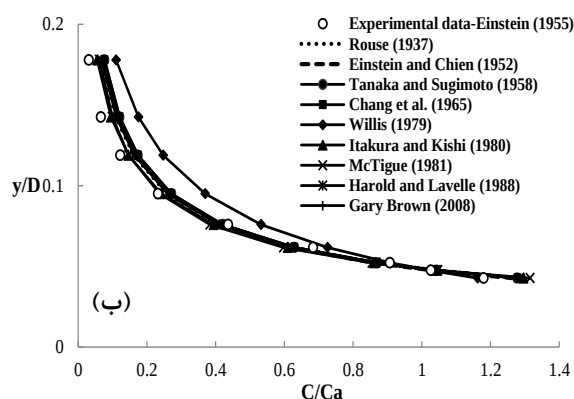
3- Root Mean Square Error

4- Modeling Efficiency

5- Coefficient of Residual Mass

اینشتین و شن برابر با  $1/0.4$  خواهد بود. از سوی دیگر، اگر مقدار ضریب  $\beta$  برابر با ۱ در نظر گرفته شود، مقدار بهینه ضریب  $k$  برای داده‌های ونونی  $0.48$  و برای اینشتین و شن معادل  $0.42$  خواهد بود. در جدول ۶ به طور خلاصه، مقادیر بهینه ضریب‌های موجود در هر معادله ارائه شده است.

آخر قرار دارد و استفاده از این معادله توصیه نمی‌شود. با توجه به اینکه هر یک از معادلات دارای ضریب‌هایی هستند که مقدار آن‌ها برای هر سری داده آزمایشگاهی متغیر است، مقدار بهینه این ضریب‌ها تعیین شد. به عنوان مثال، در معادله راوس دو ضریب  $\beta$  و  $k$  وجود دارد که اگر ضریب  $k$  ثابت و برابر  $0.4$  در نظر گرفته شود، مقدار بهینه ضریب  $\beta$  برای داده‌های آزمایشگاهی ونونی  $1/1.4$  و برای



شکل ۳- توزیع غلظت اندازه‌گیری شده و محاسبه شده با هر یک از معادله‌ها؛ الف- مقایسه با داده‌های ونونی (۱۹۴۶) و ب- مقایسه با داده‌های اینشتین و شن (۱۹۵۵)

جدول ۴- ارزیابی معادلات مختلف با پارامترهای آماری (مقایسه با داده‌های ونونی (۱۹۴۶))

| پارامترهای آماری | راوس     | اینشتین و شن | چانگ و همکاران | ویلیس   | تاناکا و سوگیموتو | ایتاکورا و کیشی | مکتیگو   | هارولد و لاول | براون    |
|------------------|----------|--------------|----------------|---------|-------------------|-----------------|----------|---------------|----------|
| AE               | $-0.014$ | $-0.008$     | $0.015$        | $0.007$ | $0.015$           | $-0.02$         | $-0.036$ | $-0.009$      | $-0.012$ |
| ME               | $0.128$  | $0.124$      | $0.121$        | $0.099$ | $0.121$           | $0.13$          | $0.177$  | $0.127$       | $0.122$  |
| RMSE             | $0.053$  | $0.047$      | $0.048$        | $0.041$ | $0.048$           | $0.057$         | $0.085$  | $0.05$        | $0.049$  |
| $R^2$            | $0.991$  | $0.993$      | $0.987$        | $0.978$ | $0.987$           | $0.992$         | $0.989$  | $0.99$        | $0.992$  |
| EF               | $0.98$   | $0.984$      | $0.983$        | $0.983$ | $0.983$           | $0.977$         | $0.948$  | $0.982$       | $0.983$  |
| CRM              | $0.033$  | $0.018$      | $-0.035$       | $0.098$ | $-0.035$          | $0.046$         | $-0.081$ | $0.02$        | $0.027$  |
| CD               | $0.833$  | $0.843$      | $0.927$        | $0.998$ | $0.927$           | $0.817$         | $0.724$  | $0.852$       | $0.843$  |
| میانگین امتیازها | $6/14$   | $8/85$       | $7/28$         | $8$     | $7/28$            | $5$             | $4$      | $6/74$        | $7/71$   |
| رتبه نهایی       | ۶        | ۱            | ۴              | ۲       | ۴                 | ۷               | ۸        | ۵             | ۳        |

جدول ۵- ارزیابی معادلات مختلف با پارامترهای آماری (مقایسه با داده‌های اینشتین (۱۹۵۵))

| پارامترهای آماری | راوس   | اینشتین و شن | چانگ و همکاران | ویلیس  | تاناکا و سوگیموتو | ایتاکورا و کیشی | مکتیو گو | هارولد و لاول | گری براون |
|------------------|--------|--------------|----------------|--------|-------------------|-----------------|----------|---------------|-----------|
| AE               | ۰/۰۱۵  | ۰/۰۱۴        | ۰/۰۲۲          | ۰/۰۶۶  | ۰/۰۲۲             | ۰/۰۰۷           | ۰/۰۰۷    | ۰/۰۱۶         | ۰/۰۱۹     |
|                  | (۸)    | (۹)          | (۵)            | (۴)    | (۵)               | (۱۰)            | (۱۰)     | (۷)           | (۶)       |
| ME               | ۰/۰۱۰۶ | ۰/۰۰۸۶       | ۰/۰۰۹۸         | ۰/۰۱۳۸ | ۰/۰۰۹۸            | ۰/۰۱۱۶          | ۰/۰۱۳۵   | ۰/۰۱۰۵        | ۰/۰۰۹۹    |
|                  | (۶)    | (۱۰)         | (۹)            | (۳)    | (۹)               | (۵)             | (۴)      | (۷)           | (۸)       |
| RMSE             | ۰/۰۰۵۱ | ۰/۰۰۴۸       | ۰/۰۰۵۱         | ۰/۰۰۸۴ | ۰/۰۰۵۱            | ۰/۰۰۵۳          | ۰/۰۰۶۲   | ۰/۰۰۵۱        | ۰/۰۰۵     |
|                  | (۸)    | (۱۰)         | (۸)            | (۵)    | (۸)               | (۷)             | (۶)      | (۸)           | (۹)       |
| R <sup>2</sup>   | ۰/۹۸۷  | ۰/۹۸۸        | ۰/۹۸۸          | ۰/۹۸۶  | ۰/۹۸۸             | ۰/۹۸۵           | ۰/۹۸     | ۰/۹۸۷         | ۰/۹۸۸     |
|                  | (۹)    | (۱۰)         | (۱۰)           | (۸)    | (۱۰)              | (۷)             | (۶)      | (۹)           | (۱۰)      |
| EF               | ۰/۹۸۶  | ۰/۹۸۸        | ۰/۹۸۶          | ۰/۸۴۸  | ۰/۹۸۶             | ۰/۹۸۵           | ۰/۹۸     | ۰/۹۸۶         | ۰/۹۸۷     |
|                  | (۸)    | (۱۰)         | (۸)            | (۵)    | (۸)               | (۷)             | (۶)      | (۸)           | (۹)       |
| CRM              | -۰/۰۲۹ | -۰/۰۲۶       | -۰/۰۴۲         | ۰/۰۵۳۹ | -۰/۰۴۲            | -۰/۰۱۳          | -۰/۰۱۳   | -۰/۰۳۱        | -۰/۰۳۶    |
|                  | (۸)    | (۹)          | (۵)            | (۴)    | (۵)               | (۱۰)            | (۱۰)     | (۷)           | (۶)       |
| CD               | ۰/۹۷۴  | ۱/۰۱         | ۰/۹۹           | ۰/۹۹۹  | ۰/۹۹              | ۰/۹۵۳           | ۰/۹۴۱    | ۰/۹۷۶         | ۰/۹۸۳     |
|                  | (۴)    | (۹)          | (۷)            | (۸)    | (۷)               | (۳)             | (۲)      | (۵)           | (۶)       |
| میانگین امتیازها | ۷/۲۸   | ۹/۴۲         | ۷/۴۲           | ۵/۴۲   | ۷/۴۲              | ۶               | ۷/۲۸     | ۷/۲۹          | ۷/۷۱      |
| رتبه نهایی       | ۵      | ۱            | ۴              | ۷      | ۳                 | ۶               | ۵        | ۴             | ۲         |

جدول ۶- مقادیر بهینه ضریب‌های موجود در هر معادله

| ردیف | معادله            | داده‌های آزمایشگاهی اینشتین و شن | داده‌های آزمایشگاهی ونونی  |
|------|-------------------|----------------------------------|----------------------------|
| ۱    | راوس              | $(\beta, k) = (1, 0/48)$         | $(\beta, k) = (1, 0/42)$   |
| ۲    | اینشتین و شن      | $(\beta, k) = (1/14, 0/4)$       | $(\beta, k) = (1/04, 0/4)$ |
| ۳    | تاناکا و سوگیموتو | $(N, k) = (0/27, 0/4)$           | $(N, k) = (0/12, 0/4)$     |
| ۴    | چانگ و همکاران    | $(\beta, k) = (1, 0/42)$         | $(\beta, k) = (1, 0/41)$   |
| ۵    | ویلیس             | $(\beta, k) = (1/02, 0/4)$       | $(\beta, k) = (1, 0/4)$    |
| ۶    | ایتاکورا و کیشی   | $k = 0/36$                       | $k = 0/3$                  |
| ۷    | مکتیو گو          | $(\beta, k) = (1, 0/48)$         | $(\beta, k) = (1, 0/44)$   |
| ۸    | هارولد و لاول     | $(\beta, k) = (1/2, 0/4)$        | $(\beta, k) = (1/09, 0/4)$ |
| ۹    | گری براون         | $k_1 = 0/44, k_2 = 0/35$         | $k_2 = 0/35$               |
|      |                   | $k = 0/44$                       | $k = 0/43$                 |
|      |                   | $\beta_{ss} = 1/05$              | $\beta_{ss} = 0/9$         |

## نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تمامی معادلات تجربی توسعه یافته برای محاسبه توزیع غلظت رسوبات معلق در کانال‌های باز بررسی شد. برای واسنجی هر یک از این معادلات، از معتبرترین داده‌های آزمایشگاهی مربوط به ونونی (۱۹۴۶) و اینشتین (۱۹۵۵) استفاده شد. سپس با استفاده از چندین شاخص آماری، بهترین معادله تجربی از میان این معادله‌ها انتخاب شد. نتایج نشان داد که:

۱. معادله توسعه یافته با اینشتین و شن (۱۹۵۲) بهترین تطابق را با داده‌های آزمایشگاهی دارد و توصیه می‌شود که در محاسبه توزیع غلظت رسوبات معلق از این معادله استفاده شود. معادله مکتیو گو (برای داده‌های ونونی) و معادله ویلیس (برای داده‌های اینشتین) کم دقت‌ترین معادلات هستند و همواره مقدار واقعی غلظت را برآورد نمی‌کنند و استفاده از آن‌ها توصیه نمی‌شود.
۲. معادله اینشتین و شن، که به نوعی شکل اصلاح شده معادله راوس است، با در نظر گرفتن ایده‌های جدید برای

8. Gary L. B. 2008. Approximate profile for non-equilibrium Suspended Sediment. *Journal of Hydraulic Engineering*. 134(7):1010-1014.
9. Huang S. H. Sun Z. L. Xu D. and Xia S. S. 2008. Vertical distribution of sediment concentration. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*. 9(11):1560-1566.
10. Itakura T. and Kishi T. 1980. Open channel flow with suspended sediments. *Journal of Hydraulic Division, ASCE*. 106(8):1325-1343.
11. Lane B. W. and Kalinske A. A. 1941. Engineering calculations of suspended sediment. *Transaction of the American Geophysical Union*. 20(3):603-6607.
12. Lavelle W. and Mofjeld H. O. 1988. Formulas for velocity, sediment concentration and suspended sediment flux for steady unidirectional pressure-driven flow. *Pacific Marine Environmental Laboratory Seattle, Washington*.
13. Liu Q. Q. Shu A. P. and Singh V. P. 2007. Analysis of the Vertical Profile of Concentration in Sediment-Laden Flows. 133(6):601-607.
14. Loague K. and Green R. E. 1991. Statistical and graphical methods for evaluating solute transport models (Overview and Application). *Journal of Contaminant Hydrology*. 7:51-73.
15. Mazumder B. S. and Ghoshal K. 2006. Velocity and concentration profiles in uniform sediment-laden flow. *Applied Mathematical Modelling*. 30:164-176.
16. Mctigue D. F. 1981. Mixture theory for suspended sediment transport. *Journal of Hydraulic Division, ASCE*. 107(6): 659-673.
17. Ni J. R. and Wang G. Q. 1991. Vertical sediment distribution. *Journal of Hydraulic Engineering*. 117 (9):1184-1194.
18. Rouse H. 1937. Modern conceptions of the mechanics of fluid turbulence. *Trans. ASCE*. Reston. Va. 102: 463-543.
19. Tanaka S. and Sugimoto S. 1958. On the distribution of suspended sediment in experimental flume flow. *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kobe University (Japan)*. No. 5.
20. Tsai C. H. and Tsai C. T. 2000. Velocity and concentration distributions of sediment-laden open channel flow. *Journal of American Water Resources Association*. 36(5):1075-1086.
21. Umeyama M. 1992. Vertical distribution of suspended sediment in uniform open-channel flow. *Journal of Hydraulic Engineering*. 118(6):936-941.
22. Umeyama M. 1999. Velocity and concentration fields in uniform flow with coarse sands. *Journal of Hydraulic Engineering*. 125 (6):653-656.

طول اختلاط به دست آمده است و از آنجا که یکی از فرضیات راوس، درنظر گرفتن توزیع لگاریتمی سرعت در توسعه معادله خود است، می‌توان گفت که توزیع لگاریتمی سرعت در جریان‌های حاوی رسوبات معلق نیز دارای اعتبار است.

۳. همچنین نتایج نشان داد در معادله اینشتین و شن، نقیصه دوم معادله راوس (یعنی صفر بودن غلظت در سطح آب) برطرف شده اما این معادله همچنان مقدار غلظت در نزدیکی بستر را کمی بیشتر از مقدار واقعی برآورد می‌کند.

۴. با توجه به فرضیات بیشتر پژوهشگران (لین و کالینسکی، اینشتین و شن، چانگ و همکاران و ویلیس)، درنظر گرفتن مقدار  $\beta=1$  (به عبارتی برابری ضریب پخش جریان و ضریب پخش رسوبات) و  $k=0.4$  خطای زیادی در محاسبه توزیع غلظت رسوبات معلق ایجاد نمی‌کند.

#### منابع

۱. امید م. ح. و نصرآبادی م. ۱۳۹۱. مهندسی رسوب (چاپ اول). انتشارات دانشگاه تهران. ۷۹۸ ص.
۲. شفاعی بجستان م. ۱۳۸۷. تئوری و کاربرد هیدرولیک انتقال رسوب (چاپ اول). انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز. ۵۵۰ ص.
۳. محمودیان شوشتری م. و نیکان‌فر ر. ۱۳۸۱. ارزیابی روش‌های برآورد بار معلق در کانال‌های آبیاری پوشش‌دار. مجله تحقیقات مهندسی کشاورزی. ۴۰-۲۷:(۱۳)۳
4. Chang F. M. Simons D. B. and Richardson E. V. 1965. Total bed-material discharge in alluvial channels. U.S. Geological Survey Water-Supply paper 1498-I.
5. Einstein H. A. and Chien N. 1952. Second approximation to the solution of the suspended load theory. Series No. 47. Issue No. 2. Institute of Engineering Research. University of California. Berkeley. Calif. January 31.
6. Enistein H. A. and Chien N. 1955. Effects of heavy sediment concentration near the bed on the velocity and sediment distribution. Report No. 8. U. S. Army Corps of Engineers. Missouri River Division. University of California.
7. Garde R. J. and Ranga Raju K. G. 2000. Mechanics of sediment transport. New Age International. New Delhi.

23. Van Rijn L. C. 1993. Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas. Aqua publication. Netherland.
24. Vanoni V. A. 1946. Transportation of Suspended Sediment by Water. Transactions. ASCE. 111:67-133.
25. Willis J. C. 1979. Suspended load from error function models. Journal of Hydraulic Division. ASCE. 105: HY-7.

