

حل عددی موج سینماتیک با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر

کلثوم حسونند^۱ و محمد رضا هاشمی^{*۲}

چکیده

یکی از معادلات ساده و کاربردی که در روندیابی هیدرولیکی و هیدرولوژیکی استفاده می‌شود، معادله موج سینماتیک است. با توجه به اینکه این معادله فقط در شرایط خاصی حل تحلیلی دارد، استفاده از روش‌های عددی برای حل آن رواج یافته است و یافتن یک روش عددی مناسب برای حل این معادله، تلاش بسیاری از محققین را به خود اختصاص داده است. روش دیفرانسیل کوادریچر (DQM)، یکی از روش‌های عددی است که به دلیل پایداری و کارایی، در زمینه‌های مختلف، مورد توجه محققین قرار گرفته است. در تحقیق حاضر از قابلیت‌های این روش برای حل عددی موج سینماتیک استفاده شده است. به این منظور، روش DQ با ساختارهای مختلف شبکه و با استفاده از توابع پایه‌ای مختلف، بکار گرفته شده است. برای ارزیابی روش DQ، نتایج این روش با نتایج حل تحلیلی و داده‌های مشاهده‌ای مقایسه شده است. بررسی‌ها نشان داد، روش DQ نسبت به انتخاب تابع پایه‌ای حساسیت چندانی ندارد ولی در مورد توزیع نقاط شبکه، توزیع کسینوسی نسبت به توزیع یکنواخت بهتر عمل می‌کند. به طور کلی روش DQ در حل معادله موج سینماتیک حتی با تعداد نقاط کم جواب‌های دقیقی ارائه می‌دهد و مدل عددی تهیه شده پایداری و کارایی خوبی دارد.

واژه‌های کلیدی: روندیابی جریان، موج سینماتیک، حل عددی، دیفرانسیل کوادریچر

ارجاع: حسونند ک. و هاشمی م.ر. ۱۳۹۰. حل عددی موج سینماتیک با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر. مجله پژوهش آب ایران. ۱۵۱-۱۶۰: (۹)۵.

۱- دانشجوی سابق سازه‌های آبی، بخش مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شیراز

۲- استادیار بخش مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شیراز

* نویسنده مسئول: Hashemi@shirazu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۱۰/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۰۵/۰۲

مقدمه

مسائل مربوط به روندیابی جریان در مجاری باز در حالت یک بعدی عمدتاً با استفاده از معادلات سنت ونان بررسی می‌شود. حل این معادلات نیاز به اطلاعات کامل درباره‌ی شرایط مرزی جریان دارد. همچنین به دلیل غیرخطی بودن معادلات، در پاره‌ای از موارد به خصوص در تغییرات ناگهانی شیب یا مقطع عرضی با مشکلات پایداری روبرو می‌شوند. به همین دلیل تلاش‌هایی برای ساده‌سازی این معادلات صورت گرفته است که از جمله می‌توان به دو مدل عمومی موج سینماتیک و موج پخشیدگی اشاره کرد. استفاده از هر کدام از این مدل‌ها بستگی به اهمیت تأثیر ترم گرادیان فشار، شتاب محلی و شتاب جابجایی در معادله اندازه حرکت دارد. به طوری که برای رسیدن به معادله موج پخشیدگی، تأثیر نیروی اینرسی (شتاب محلی و شتاب جابجایی) نادیده گرفته می‌شود و در معادله موج سینماتیک علاوه بر نادیده گرفتن تأثیر نیروی اینرسی از تأثیر گرادیان فشاری نیز صرف‌نظر می‌شود. این معادلات در موارد خاص مثل استفاده از کانال با هندسه ساده و یا در شدت بارش‌های ثابت دارای حل تحلیلی می‌باشند. با وجود این، از آنجا که حل تحلیلی برای همه مسائل ممکن نیست، از روش‌های عددی برای حل این معادلات استفاده می‌شود. روش‌های سنتی منفصل سازی عددی را می‌توان به سه دسته روش تفاضل محدود (FDM)، عناصر محدود (FEM) و احجام محدود (FVM) تقسیم کرد. در برخی از تحقیقات پیشین برای حل معادله موج سینماتیک از روش‌های تفاضل محدود و عناصر محدود استفاده شده است (تایفور و همکاران، ۱۹۹۳؛ کازیزیلماز-الهان و همکاران، ۲۰۰۵؛ جابر و محتار، ۲۰۰۲). در هر یک از این روش‌ها برای به دست آوردن نتایج با دقت مناسب تعداد نسبتاً زیادی نقطه استفاده شده است.

دیفرانسیل کوادریچر (DQ) نیز یکی دیگر از روش‌های عددی است که در بسیاری از زمینه‌های علمی روشی با کارایی بالا شناخته شده است. این روش اولین بار توسط بلمن و همکاران (۱۹۷۲) معرفی شد. در ادامه روش‌های دیفرانسیل کوادریچر مبتنی بر بسط چندجمله‌ای (PDQ) و دیفرانسیل کوادریچر مبتنی بر

بسط سری فوریه (FDQ) معرفی شد (شو و چو، ۱۹۹۷). به این ترتیب پیشرفت چشمگیری در کاربرد روش دیفرانسیل کوادریچر حاصل شد و از آن به بعد در حل مسائل تحلیل سازه‌ها، جریان سیال و همچنین مسائل ارتعاش آزاد ورق‌ها با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است (چن، ۲۰۰۰؛ شو و همکاران، ۲۰۰۴؛ کرمی و ملک‌زاده، ۲۰۰۴). آن چه باعث گسترش این روش شد، استفاده از تعداد نقاط کمتر در انجام محاسبات و در ضمن پایداری بدون شرط و دقت نتایج می‌باشد.

در بسیاری از تحقیقات گذشته روش DQ فقط برای محاسبه‌ی مشتقات مکانی استفاده شده و برای تخمین مشتقات زمانی از دیگر روش‌ها مانند روش رانژ-کوتا استفاده شده است. در زمینه به کارگیری روش DQ برای محاسبه مشتقات در جهت زمانی نیز تحقیقاتی صورت گرفته است؛ در این راستا برای کارآمدی بیشتر DQ، میدان محاسباتی در جهت زمانی به چند قسمت تقسیم می‌شود و روش DQ در هر قسمت به کار گرفته می‌شود. شو و همکاران (۲۰۰۲) از این روش برای حل معادلات ناویر-استوکس بهره گرفتند. همچنین هاشمی و همکاران (۲۰۰۷) نیز با استفاده از این روش، معادلات سنت‌ونان در کانال‌های باز را بررسی کردند.

معادله موج سینماتیک در مسائل روندیابی در شیب‌های تند و نیز در هیدرولوژی مهندسی به ویژه جریان روستحی موارد استفاده فراوانی دارد (پونکه، ۱۹۸۹). همچنین این معادله در محدوده کاربرد خود مزیت‌های ویژه‌ای دارد که از جمله می‌توان به سادگی معادله و نیاز به شرایط مرزی کمتر اشاره کرد.

در تحقیق حاضر که با هدف سنجش کارایی و قابلیت روش DQ در حل معادله موج جنبشی انجام شده، با استفاده از روش DQ یک مدل عددی با کارایی و دقت مناسب برای حل معادله موج سینماتیک ارائه شده است. به این منظور یکبار از روش ترکیبی DQ-FD استفاده شده است که در آن مشتقات مکانی با روش DQ و مشتقات زمانی با روش FD محاسبه شده‌اند و بار دیگر برای باز کردن هر دو نوع مشتقات زمانی و مکانی از روش DQ استفاده شده است. برای ارزیابی روش DQ، نتایج حاصل از این روش‌ها با روش‌های تحلیلی و داده‌های واقعی به عنوان شاهد، مقایسه شده‌اند.

$$\frac{t_r S_0 V_0}{d_0} \geq N \quad (5)$$

که در آن t_r زمان رسیدن به دبی اوج، S_0 شیب کف، d_0 متوسط عمق آب و V_0 متوسط سرعت در هیدروگراف ورودی می‌باشد. مقدار پیشنهادی برای N برابر با ۸۵ می‌باشد. این معادله محدوده‌ی کاربرد معادله موج سینماتیک را در کانال‌های باز نشان می‌دهد. برای بررسی قابلیت کاربرد معادله موج سینماتیک در جریان روستحی نیز با استفاده از آزمایشات عددی، ضابطه‌ای به صورت $KF^2 \geq 5$ ارائه شده است که در آن F عدد فرود می‌باشد و K عدد موج سینماتیک نامیده می‌شود. برخی محققین اشاره کرده‌اند که برای مقادیر K بزرگتر از ۲۰ یا به عبارتی برای اعداد فرود کمتر از ۰/۵ معادله موج سینماتیک می‌تواند جایگزین خوبی برای معادلات سنت ونان باشد (موریس و وولپیسر، ۱۹۸۰). در واقع چون در معادله موج سینماتیک ترم‌های مربوط به اینرسی و فشار موجود در معادلات سنت ونان نادیده گرفته می‌شوند باید این ترم‌ها در این محدوده ضعیف باشند. همچنین در برخی تحقیقات دیگر اشاره شده که در شیب‌های تند یعنی شیب‌های بیشتر از ۰/۰۰۲ نیز معادله موج سینماتیک می‌تواند برای مدل‌سازی جریان به کار گرفته شود (هندرسون، ۱۹۶۶).

حل عددی معادله موج سینماتیک با استفاده از روش DQ در روش دیفرانسیل کوادریچر برای تخمین مشتق مرتبه‌ی n تابع f در راستای θ در هر بازه‌ی $[a, b]$ ، بازه به N نقطه تقسیم می‌شود (شکل ۱). سپس مشتق تابع از معادله‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\left. \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n} \right|_{\theta = \theta_i} = \sum_{j=1}^{N_\theta} w_{ij}^n f(\theta_j) \quad i = 1, 2, \dots, N_\theta \quad (6)$$

که در آن $f(\theta_j)$ ، مقدار تابع در نقطه‌ی θ_j را نشان می‌دهد و w_{ij}^n نشان دهنده‌ی ضریب وزنی هر نقطه است که میزان تأثیر نقطه‌ی j را در محاسبه‌ی مشتق مرتبه‌ی n ام نقطه‌ی i ، نشان می‌دهد (شو، ۲۰۰۰).

مواد و روش‌ها

برای شناخت بیشتر معادله موج سینماتیک، در قسمت بعد معادله حاکم و شرایط مرزی بیان شده‌اند. سپس با بیان کلیات روش دیفرانسیل کوادریچر، چگونگی اعمال روش دیفرانسیل کوادریچر روی معادله موج سینماتیک بیان شده است. پس از آن با طراحی آزمایشات عددی، دقت و کارایی روش دیفرانسیل کوادریچر در حل معادله موج سینماتیک بررسی شده است و در پایان بحث پیرامون نتایج و نتیجه‌گیری کلی ارائه شده است.

معادلات حاکم، شرایط اولیه و شرایط مرزی

معادله موج سینماتیک به صورت زیر نوشته می‌شود (چو و همکاران، ۱۹۸۸):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C_k \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1)$$

در این معادله C_k ، سرعت موج سینماتیک است و از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$C_k = \frac{dQ}{dA} = \frac{dQ/dh}{dA/dh} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dh} \quad (2)$$

در معادله فوق T عرض سطح آب و h عمق آب است. در معادله موج سینماتیک، مشتق زمانی از درجه‌ی اول است بنابراین برای حل آن، یک شرط اولیه نیاز است همچنین مشتق مکانی نیز از مرتبه اول است و یک شرط مرزی هم نیاز است. مقادیر اولیه‌ی مربوط به دبی جریان به عنوان شرط اولیه در نظر گرفته می‌شود که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Q(x, 0) = Q_0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

که در آن Q_0 تابعی از x است. برای در نظر گرفتن شرط مرزی، شکل‌های مختلفی وجود دارد. اما به طور معمول هیدروگراف ورودی به عنوان شرط مرزی بالادست در نظر گرفته می‌شود:

$$Q(0, t) = Q_U(t) \quad (4)$$

محدوده کاربرد معادله موج سینماتیک

برای بررسی کارایی معادله موج سینماتیک برای حل مسایل روندیابی جریان، معیارهایی وجود دارد که از آن میان می‌توان به ضابطه‌ی پیشنهادی پونکه (۱۹۸۹) اشاره کرد. این معادله به صورت زیر تعریف شده است:

باشد. همچنین برای تخمین مشتق زمانی از معادله‌ی زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} \right\}_{ij}^r = \sum_{n=1}^{N_t^r} CT_{jn}^r Q_{in}^r \quad (11)$$

که در آن CT^r نشان دهنده‌ی ضرایب وزنی دیفرانسیل کوادریچر، در جهت t برای هر بلوک زمانی می‌باشد. در معادله بالا شرایط اولیه برای اولین بلوک زمانی همان شرایط اولیه مسأله می‌باشد و برای بقیه بلوک‌ها نیز شرایط اولیه با توجه به بلوک زمانی قبلی به دست می‌آیند بنابراین مشتق زمانی هر نقطه عبارت است از:

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} \right\}_{ij}^r = CT_{j1}^r Q_{i1}^r + \sum_{n=2}^{N_t^r} CT_{jn}^r Q_{in}^r \quad (12)$$

سرعت موج سینماتیک (C_k)، نیز تابعی از جریان آب در کانال است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\{C_k\}_{ij}^r = \left\{ \frac{dQ}{dA} \right\}_{ij}^r = \left(\frac{1}{T} \frac{dQ}{dh} \right)_{ij}^r \quad (13)$$

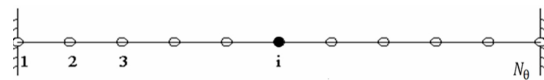
با جایگذاری معادلات ۱۰، ۱۲ و ۱۳ در معادله ۱، معادله موج سینماتیک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$CT_{j1}^r Q_{i1}^r + \sum_{n=2}^{N_t^r} CT_{jn}^r Q_{in}^r + \left(\frac{1}{T} \frac{dQ}{dh} \right)_{ij}^r \times \sum_{m=1}^{N_x} CX_{im}^r Q_{mj}^r = 0 \quad (14)$$

اگر معادله برای یک بلوک زمانی که از $(N_x)(N_t^r)$ نقطه تشکیل شده است به کار گرفته شود با توجه به اینکه شرایط اولیه در هر بلوک زمانی معلوم می‌باشد تعداد $(N_x)(N_t^r - 1)$ مجهول وجود خواهد داشت. با نوشتن معادله ۱۴ برای کلیه‌ی نقاط داخلی هر بلوک، $(N_x - 1)(N_t^r - 1)$ معادله غیرخطی به دست خواهد آمد. مقدار دبی در مرز بالادست نیز به عنوان تابعی معلوم از زمان نوشته می‌شود:

$$Q_{ij}^r - Q_U^r(t_j) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N_t^r \quad (15)$$

در این معادله Q_U^r ، مقدار دبی در مرز بالادست برای نقطه‌ی زمانی در بلوک r است. به این ترتیب با نوشتن این معادله در هر بلوک، $(N_t^r - 1)$ معادله‌ی دیگر به



شکل ۱- تقسیم بازه به N نقطه برای محاسبه مشتق نقطه i

انتخاب تابع پایه‌ای و انتخاب شکل مناسب برای توزیع نقاط شبکه دو عامل تأثیرگذار در تعیین ضرایب وزنی هستند. در انتخاب توابع پایه‌ای می‌توان از توابع چندجمله‌ای و یا توابع هارمونیک استفاده کرد. همچنین دو شکل اصلی که برای توزیع نقاط شبکه می‌توان از آن استفاده کرد توزیع یکنواخت و توزیع کسینوسی Chebyshev-Gauss-Lobatto هستند که به ترتیب با معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$X_i = L \frac{(i-1)}{(N-1)} \quad (7)$$

$$X_i = 0.5L \left[1 - \cos \left(\frac{\pi(i-1)}{N-1} \right) \right] \quad (8)$$

هنگامی که روش DQ برای جهت زمانی استفاده می‌شود، برای کارآمدی بیشتر، میدان محاسباتی در جهت t به چند بلوک زمانی تقسیم شده است و معادله ۱ در بلوک زمانی r به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} \right\}_{ij}^r + \{C_k\}_{ij}^r \times \left\{ \frac{\partial Q}{\partial X} \right\}_{ij}^r = q_{ij}^r \quad (9)$$

در این معادله،

$$i = 1, 2, \dots, N_x,$$

$$j = 2, 3, \dots, N_t^r,$$

$$r = 1, 2, 3, \dots, N_b$$

N_x تعداد نقاط شبکه در راستای مکان و N_t^r تعداد نقاط شبکه در راستای زمانی برای هر بلوک زمانی و N_b تعداد بلوک‌های زمانی می‌باشند. با استفاده از روش DQ، مشتق مکانی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial X} \right\}_{ij}^r = \sum_{m=1}^{N_x} CX_{im}^r Q_{mj}^r \quad (10)$$

در این معادله CX^r نشان دهنده‌ی ضرایب وزنی دیفرانسیل کوادریچر، در جهت X برای هر بلوک می‌-

هیدروگراف‌های تخمینی از روش DQ کامل و روش ترکیبی DQ-FD با حل تحلیلی مقایسه شده‌اند.

بررسی همگرایی روش DQ

هدف از مطالعات همگرایی پیدا کردن حداقل نقاط استفاده از روش DQ است به طوری که بعد از آن با افزایش تعداد نقاط، نتایج تغییر چندانی نداشته باشند. شکل ۳ همگرایی روش DQ در جهت مکانی و زمانی را نشان می‌دهد؛ به این منظور حداکثر دبی محاسبه شده به ازای تعداد نقاط رسم شده است؛ مقدار همگرایی برای حداکثر دبی برابر با ۰/۱۵۴ متر مربع بر دقیقه است. همانطور که دیده می‌شود روش DQ در جهت مکانی با تعداد نقاط کم ($N_x=7$) همگرا می‌شود. برای بررسی همگرایی در جهت زمان نیز حداکثر دبی محاسبه شده به ازای تعداد بلوک‌ها و تعداد نقاط هر بلوک در شکل ۳ رسم شده است؛ همانطور که در تحقیقات پیشین نیز اشاره شده است، هنگام استفاده از تعداد بلوک‌های کم، برای همگرا شدن به تعداد نقاط بیشتری نیاز است در حالی که با بیشتر کردن بلوک‌ها، با استفاده از تعداد نقاط کمتری نتایج همگرا می‌شود. به عنوان مثال با ۱۰ بلوک زمانی، حداقل نقاط لازم در هر بلوک برای همگرا شدن ۱۵ نقطه است و در صورت استفاده از ۱۸ بلوک زمانی، نتایج با ۶ نقطه در هر بلوک، همگرا می‌شوند. اگر N_r تعداد بلوک‌های زمانی باشد تعداد نقاط شبکه از معادله $(N_r - 1) * N_r + 1$ محاسبه می‌شود، بنابراین در حالت اول تعداد کل نقاط برابر با ۱۴۱ نقطه و در حالت دوم برابر با ۹۱ نقطه است.

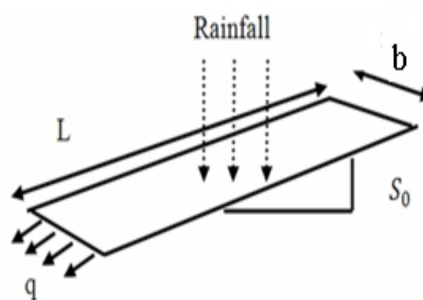
در استفاده از تعداد بلوک‌های کم، چون تعداد نقاط بیشتری برای هر بلوک باید در نظر گرفت، هنگام استفاده از روش نیوتن اندازه ماتریس ژاکوبین تشکیل شده برای هر بلوک زمانی، بزرگتر از وقتی است که شبکه محاسباتی به بلوک‌های زمانی بیشتر ولی با تعداد نقاط کمتر تقسیم می‌شود. در جدول ۱ زمان انجام محاسبات به صورت نسبی به ازای تعداد بلوک‌های زمانی و تعداد نقاط هر بلوک ارایه شده است.

دست می‌آید و تعداد کل معادلات به $(N_x)(N_t^r - 1)$ معادله می‌رسد سپس با استفاده از روش نیوتن می‌توان این دستگاه معادلات غیر خطی را حل کرد.

آزمایش‌های سنجش اعتبار مدل

برای ارزیابی روش دیفرانسیل کوادریچر در حل معادله موج سینماتیک، پس از آنکه برنامه کامپیوتری در محیط MATLAB تهیه شد، دو مثال عددی ارزیابی شد^۱. در آزمایشات عددی یکبار از روش ترکیبی DQ-FD استفاده شده است؛ به این صورت که برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی از روش دیفرانسیل کوادریچر و برای مشتقات زمانی از روش تفاضل محدود جلو رونده استفاده شده است و بار دیگر مشتقات هر دو جهت مکانی و زمانی با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر تخمین زده شده‌اند. سپس نتایج حاصل از این بررسی‌ها با حل تحلیلی و داده‌های مشاهده‌ای مقایسه شده‌اند.

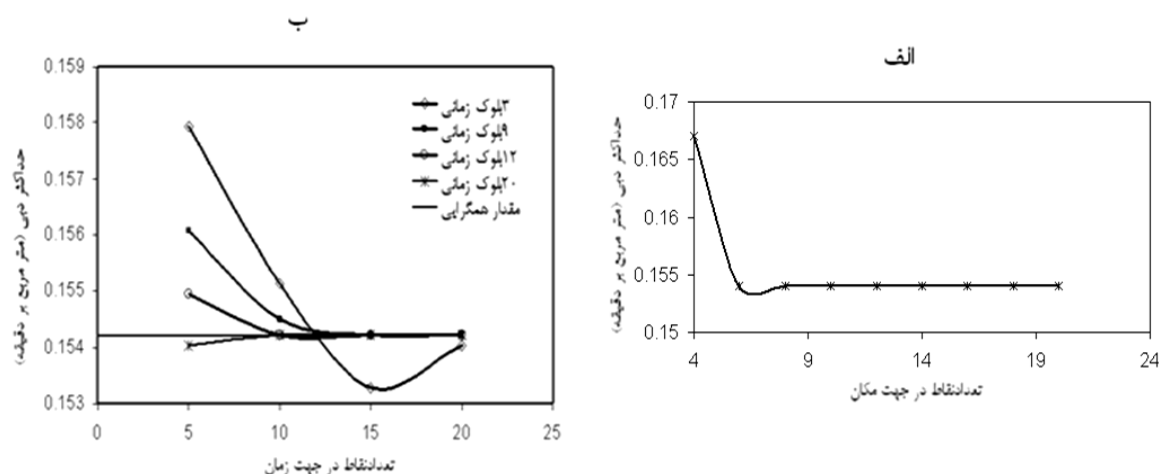
آزمایش ۱- بارندگی به شدت ۵۰/۸ میلی متر بر ساعت به مدت ۳۰ دقیقه روی آبراهه‌ای به طول ۱۸۲/۸۸ متر تداوم داشته است (شکل ۲)؛ آبراهه دارای عرض ۰/۳۰۴۸ متر، شیب ۰/۰۰۱۶ و ضریب زبری مانینگ ۰/۰۲۵ می‌باشد. هدف محاسبه‌ی مقدار دبی خروجی از آبراهه بعد از ۶۰ دقیقه است (کازیزیلماز-الهان و همکاران، ۲۰۰۵).



شکل ۲- بارندگی روی آبراهه فرضی

ابتدا مطالعات همگرایی برای روش DQ انجام شده سپس تأثیر ساختار DQ بررسی شده است و در پایان

۱- با توجه به محدودیت حجم مقاله از ارایه مثال‌های دیگر صرف‌نظر شده است



شکل ۳- بررسی همگرایی برای دبی حداکثر (الف) در جهت مکان (ب) در جهت زمان

جدول ۱- زمان لازم برای انجام محاسبات

تعداد بلوک	تعداد نقاط هر بلوک	تعداد کل نقاط	دبی اوج (متر مربع بر دقیقه)	زمان نسبی انجام
۹	۵	۳۷	۰/۱۵۶	۱/۳۳
۱۰	۱۰	۸۲	۰/۱۵۵	۲/۳۹
۱۵	۱۵	۱۲۷	۰/۱۵۴	۴/۹۲
۱۲	۵	۴۹	۰/۱۵۵	۱
۹	۹	۹۷	۰/۱۵۴	۳/۵۸
۲۰	۳	۴۱	۰/۱۵۳	۱/۰۸
۵	۵	۸۱	۰/۱۵۴	۱/۳۱

* چون زمان با توجه به مشخصات کامپیوترهای مختلف، فرق می کند به صورت نسبی ارائه شده است.

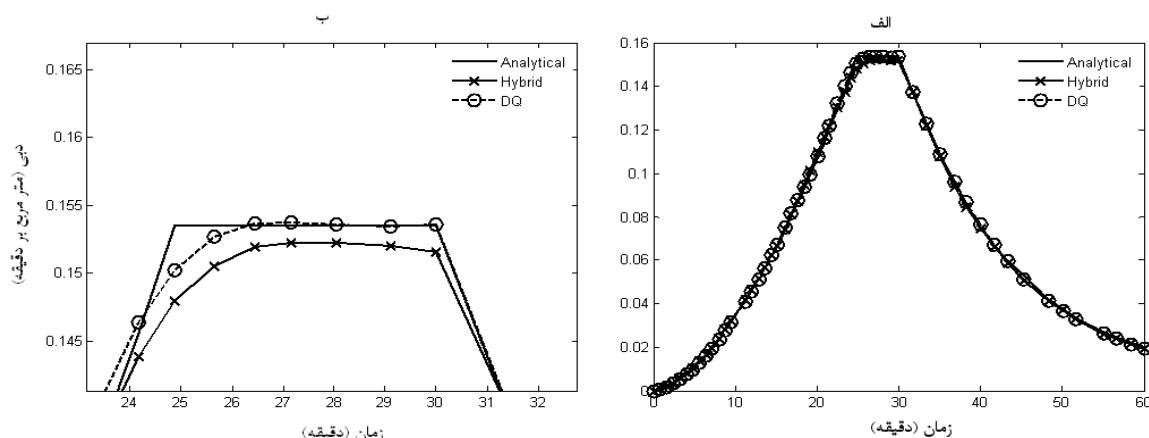
نتایج و بحث

برای ارزیابی روش DQ در حل این مسأله، حل تحلیلی ارائه شده توسط ایگلسون (۱۹۷۰) به عنوان شاهد در نظر گرفته شده است. نتایج این بررسی در شکل ۴ نشان داده شده اند؛ همانطور که دیده می شود هیدروگراف های خروجی محاسبه شده با هر دو روش تطابق زیادی با هیدروگراف حاصل از حل تحلیلی دارند. اما هنگام محاسبات، روش ترکیبی نسبت به انتخاب گام زمانی حساسیت دارد و در استفاده از گام های زمانی طولانی، مسأله ناپایدار می شود. بنابراین در انتخاب گام های زمانی و فاصله های مکانی معیارهای پایداری باید کنترل شوند. معادله ای که عموماً برای تعیین پایداری استفاده می شود عدد کورانت است که برای تامین پایداری باید مقدار آن

کمتر از یک باشد. در صورتی که با به کارگیری روش DQ در هر دو جهت مکانی و زمانی، در انتخاب گام زمانی محدودیتی وجود ندارد و همچنین در این حالت با تعداد نقاط کم شبکه نیز، نتایج با دقت کافی به دست می آید. در صورتی که در روش ترکیبی برای رسیدن به نتایج دقیق، باید تعداد نقاط زیادی برای شبکه محاسباتی در نظر گرفت در نتیجه زمان لازم برای انجام محاسبات افزایش خواهد یافت.

برای مقایسه ی روش ارائه شده در تحقیق حاضر و سایر روش های عددی، نرُم خطا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|e\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n |e_i|^2 \right]^{1/2}, e_i = q_i^{numeric} - q_i^{analytic} \quad (16)$$



شکل ۴- هیدروگراف خروجی آزمایش عددی ۱. الف) هیدروگراف کامل ب) بزرگ نمایی پیک

ندارد. اما روش مک کرماک یک روش صریح است و در آن باید شرایط پایداری به گونه‌ای کنترل شود که عدد کورانت کمتر از یک باشد، برای این امر لازم است گام‌های زمانی کوچکتر انتخاب شود. در صورتی که روش دیفرانسیل کوادریچر حتی در اعداد کورانت بیشتر از ۵ نیز پایدار است.

جدول ۲، مقایسه بین روش DQ و سایر روش‌های عددی را نشان می‌دهد. برای مقایسه با دیگر روش‌ها باید اشاره کرد در تحقیق انجام شده توسط کازیزیلماز-الهان و همکاران (۲۰۰۵) روش مک کرماک به عنوان روش با کارایی بهتر معرفی شده است. با مقایسه نرم خطای روش دیفرانسیل کوادریچر و روش مک کرماک ملاحظه می‌شود تفاوت زیادی بین این دو مقدار وجود

جدول ۲- مقایسه نرم خطای روش‌های عددی مختلف؛ آزمایش عددی ۱

*4-point Implicit	*MacCormack	*Implicit FF	*Explicit	Hybrid	DQ	روش عددی
۰/۱۷	۰/۳۷	۰/۷۶	۱/۰۱	۰/۸۵	۰/۴۰	نرم خطا
_____	_____	۱۲/۲۰	۳/۲۶	۲/۳۰	۱/۰۳	زمان انجام محاسبات (ثانیه) ^{**}
_____	_____	۱۱/۸۴	۳/۱۶	۲/۲۳	۱	زمان نسبی (نسبت به DQ)

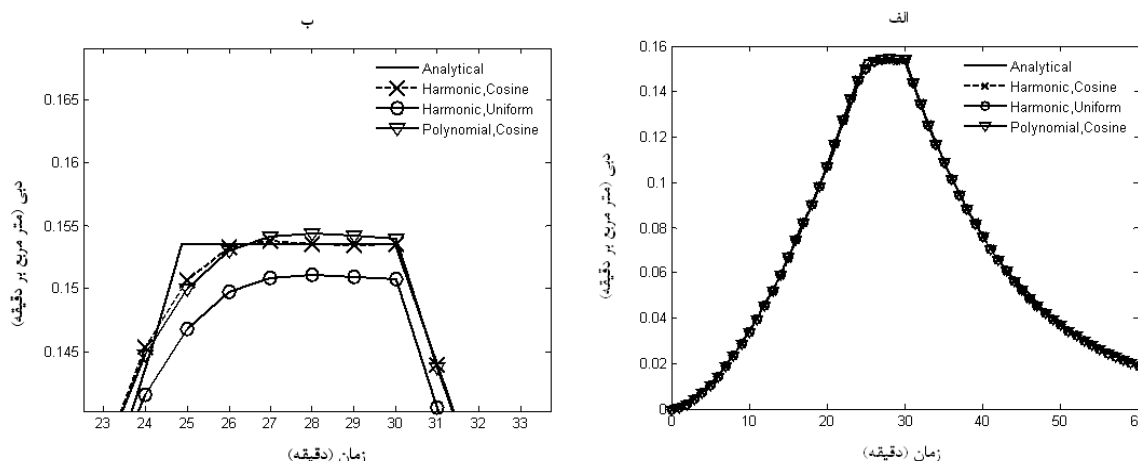
* روش‌های به کار گرفته شده توسط الهان و همکاران (۲۰۰۵)

** با توجه به متفاوت بودن کامپیوترهای مورد استفاده، امکان مقایسه زمان انجام محاسبات روش‌های DQ و Hybrid با اعداد گزارش شده توسط کازیزیلماز-الهان و همکاران وجود نداشت و برنامه دو روش Explicit و Implicit نیز برای نمونه نوشته شد.

در تحقیق حاضر عملکرد هر دو نوع تابع با هر دو شکل توزیع نقاط شبکه بررسی شده است. با این بررسی‌ها مشاهده شد که نتایج به دست آمده از توزیع کسینوسی نسبت به توزیع یکنواخت دقیق‌تر است. همچنین نتایج به دست آمده از به کارگیری تابع هارمونیک و تابع چندجمله‌ای از نظر دقت تفاوت محسوسی با هم ندارند. شکل ۵ هیدروگراف خروجی تخمین زده شده با استفاده از ساختارهای مختلف را نشان می‌دهد.

تأثیر ساختار DQ

همانطور که قبلاً ذکر شد انتخاب تابع پایه‌ای مناسب برای محاسبه‌ی ضرایب مشتقات و چگونگی توزیع نقاط شبکه دو فاکتور مهم در به کارگیری روش DQ هستند؛ برای محاسبه‌ی ضرایب می‌توان از تابع هارمونیک (مبتنی بر بسط سری فوریه) و یا تابع چند جمله‌ای (مبتنی بر بسط چندجمله‌ای لاگرانژ) استفاده کرد و برای توزیع نقاط شبکه نیز شکل یکنواخت و یا شکل کسینوسی را می‌توان به کار برد.

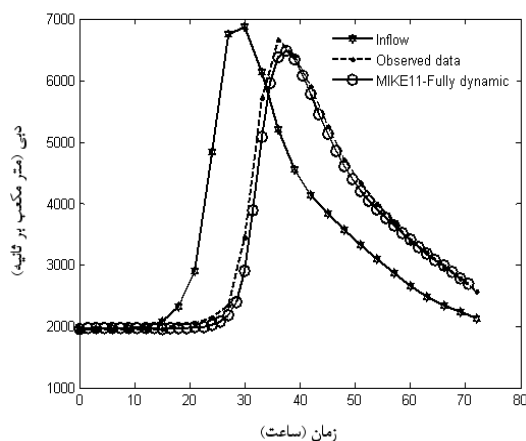


شکل ۵- تأثیر ساختار DQ در تخمین هیدروگراف خروجی (الف) هیدروگراف کامل (ب) بزرگ نمایی بیک

است. همانطور که دیده می‌شود این دو هیدروگراف خروجی مطابقت زیادی با هم داشته‌اند. هیدروگراف خروجی این مسأله با استفاده از مدل موج سینماتیک و با استفاده از روش DQ تخمین زده شد که نتیجه آن در شکل ۶ رسم شده است.

هیدروگراف خروجی حاصل، زمان رسیدن به دبی اوج را به خوبی تخمین می‌زند اما مقدار دبی اوج آن نسبت به دبی اوج داده‌های مشاهده‌ای بیشتر است. این نتیجه چندان هم دور از انتظار نیست، زیرا موج سینماتیک مقدار افت دبی را لحاظ نمی‌کند، بلکه فقط هیدروگراف خروجی را با زمان منتقل می‌کند. این مسأله در محدوده کاربرد موج سینماتیک مشکلی به وجود نمی‌آورد اما در مسایلی که مقدار نیروهای فشاری زیاد است (به دلیل اینکه منجر به افت دبی می‌شود) نمی‌توان از این مدل استفاده کرد. برای روشن تر شدن موضوع، هیدروگراف خروجی از معادله موج پخشیدگی نیز مدل‌سازی شد. این هیدروگراف در شکل ۷ رسم شده است و همانطور که دیده می‌شود مطابقت زیادی با داده‌های خروجی دارد. اگر چه مدل موج سینماتیک جواب‌های نسبتاً مناسبی ارائه می‌دهد، اما برای رفع اختلاف نتایج در دبی اوج سیلاب بهتر است از مدل موج پخشیدگی که اثر کاهش دبی اوج را نشان می‌دهد استفاده شود.

آزمایش ۲- در آگوست ۱۹۶۸ داده‌های یک سیلاب در ایستگاه Yuanling و همچنین ایستگاه Wangjiahe که در پایین دست آن قرار دارد اندازه‌گیری شده‌اند. رودخانه در بازه‌ی بین این دو ایستگاه دارای طول ۱۱۲ کیلومتر و عرض متوسط ۳۵۲/۷ متر است. ضریب شزی معادل ۳۲ و شیب متوسط کف برابر با ۰/۰۰۰۴ می‌باشد (ونگ و همکاران، ۲۰۰۶). در شکل ۶ هیدروگراف‌های ورودی و خروجی رسم شده است.

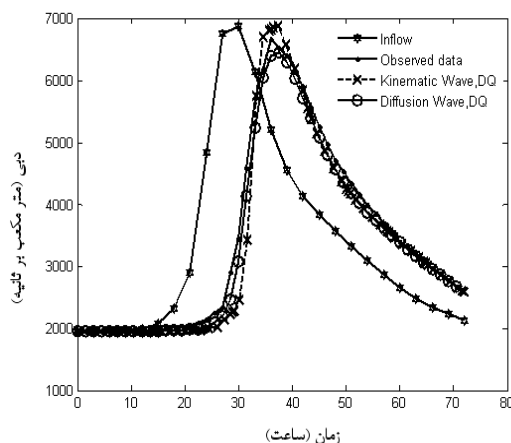


شکل ۶- مقادیر دبی در دو ایستگاه Wangjiahe و Yuanling

همچنین برای اطمینان بیشتر از صحت داده‌های اندازه‌گیری شده، این مسأله با نرم‌افزار MIKE11 نیز شبیه‌سازی شده است که هیدروگراف خروجی به دست آمده از این نرم‌افزار نیز در شکل ۶ رسم شده

منابع

- 1- Bellman R. Kashef B. G. and Casti J. 1972. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 10(1): 40-52.
- 2- Chen C.N. 2000. Efficient and reliable solutions of static and dynamic nonlinear structural mechanics problems by an integrated numerical approach using DQFEM and direct time integration with accelerated equilibrium iteration schemes. *Applied Mathematical Modelling*. 24(8-9): 637-655.
- 3- Chow V.T. Maidment D.R. and Mays L.W. 1988. *Applied Hydrology*. New York: McGraw Hill.
- 4- Eagleson P.S. 1970. *Daynamic Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- 5- Hashemi M.R. Abedini M.J. and Malekzadeh P. 2007. A differential quadrature analysis of unsteady open channel flow. *Applied Mathematical Modelling*. 31(8): 1594-1608.
- 6- Henderson F.M. 1966. *Open channel flow*. New York, Macmillan Publishing Co. Inc.
- 7- Jaber F.H. and Mohtar R.H. 2002. Stability and accuracy of finite element schemes for the one-dimensional kinematic wave solution. *Advances in Water Resources*. 25:427-438.
- 8- Karami G. and Malekzadeh P. 2004. In-plane free vibration analysis of circular arches with varying cross-sections using differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*. 274(3-5):777-799.
- 9- Kazezyilmaz-Alhan C.M. Medina M.A. and Rao P. 2005. On numerical modeling of overland flow. *Applied Mathematics and Computation*. 166(3): 724-740.
- 10- Morris E.M. and Woolhiser D.A. 1980. Unsteady one dimensional flow over a plane: partial equilibrium hydrograph. *Water Resources Research*. 16(2): 355-360.
- 11- Ponce V.M. 1989. *Engineering hydrology*. Prentice-Hill, Inc.
- 12- Shu C. 2000. *differential quadrature and its application in engineering*. Springer- Verlag.
- 13- Shu C. Yao Q. and Yeo K.S. 2002. Block-marching in time with DQ discretization: An efficient method for time-dependent problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 191(41-42): 4587-4597.
- 14- Shu C. Wang L. and Chew Y.T. 2004. Numerical computation of three-dimentional incompressible Navier-Stokes equations in



شکل ۷- مقایسه هیدروگراف خروجی به دست آمده از DQ با داده های مشاهده ای

نتیجه گیری

در پژوهش حاضر از روش دیفرانسیل کوادریچر برای حل معادله یک بعدی موج سینماتیک استفاده شد. مطالعات انجام شده در این پژوهش نشان می دهد روش دیفرانسیل کوادریچر در حل معادله موج سینماتیک می تواند با استفاده از کمترین تعداد نقاط به کار گرفته شده در شبکه نتایج خوبی ارائه دهد؛ همچنین این روش کارایی و پایداری خوبی در ارائه نتایج دارد به این معنی که در این روش برای تعیین گام زمانی جهت انجام محاسبات محدودیتی وجود ندارد. به کار گیری روش DQ در هر دو جهت زمانی و مکانی نتایج دقیق تری در مقایسه با روش ترکیبی DQ-FD ارائه می دهد. ضمن اینکه همانطور که در تحقیقات پیشین نیز نشان داده شده است، با تقسیم میدان محاسباتی در جهت زمانی به چند بلوک زمانی، می توان زمان لازم برای انجام محاسبات را کاهش داد.

روش DQ در حل معادله موج سینماتیک نسبت به انتخاب تابع پایه ای حساس نمی باشد و نتایج به دست آمده از نظر دقت و زمان انجام محاسبات یکسان می باشند. اما چگونگی توزیع نقاط شبکه روی نتایج به دست آمده تأثیر چشمگیری دارد به طوری که نتایج حاصل از توزیع کسینوسی دقیق تر از توزیع یکنواخت است.

- 16- Wang G.T. Yao C. Okoren C. and Chen S. 2006. 4-Point FDF of Muskingum method based on the complete St Venant equations. *Journal of Hydrology*. 324(1-4): 339-349.
- 15- Shu C. and Chew Y.T. 1997. Fourier expansion-based differential quadrature and its application to Helmholtz eigenvalue problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 13(8): 643-653.
- primitive variable form by DQ method. *International journal for numerical method in fluids*. 43: 345-368.