

## بررسی عددی جریان سیلاب در شبکه فاضلاب با در نظر گرفتن آثار مجرای ورودی

صادق مودی<sup>۱</sup>، حسین مهدی‌زاده<sup>۲\*</sup> و مهدی اژدری‌مقدم<sup>۳</sup>

### چکیده

مجرای ورودی، از اجزای شبکه فاضلاب است که نقش انتقال آب سطحی به شبکه زیرزمینی را ایفا می‌کند. به‌طور کلی مدل‌سازی این‌گونه جریان‌ها، تنها با استفاده از معادلات سه‌بعدی ناویر-استوکس امکان‌پذیر است که بسیار پیچیده و زمان‌بر هستند. در این‌جا از معادلات آب‌های کم‌عمق با فرض فشار هیدرواستاتیک برای پیش‌بینی حرکت امواج و به‌عنوان یک جایگزین مناسب برای معادلات ناویر-استوکس استفاده شد. برای در نظر گرفتن وضعیت جریان در مجرای ورودی، از یک سیستم معادلات معمولی استفاده شد. در پژوهش حاضر، ابتدا برای صحت‌سنجی حل عددی، برهم‌کنش جریان ناشی از شکست سد با جریان خروجی از مجرای فاضلاب بررسی شد. سپس جریان آب در یک شبکه فاضلاب شامل یک مجرای ورودی و کانال زیرین، مدل‌سازی و نتایج آن با نتایج معادلات ناویر-استوکس حاصل از نرم‌افزار استار سی‌دی، مقایسه شد. همچنین یک عدد بدون بعد به نام عدد مجرای ورودی بر اساس ارتفاع مجرا و کانال زیرین، عرض مجرا و سرعت ورود آب به مجرا تعریف شد. برای تعریف یک محدوده مناسب برای این عدد، آزمایش‌های عددی گوناگونی با تغییر در پارامترهای مؤثر انجام می‌شود؛ و نتیجه شد در صورتی که  $MN \leq 0.98$  باشد، خطای محاسبه‌شده با روش RMSE کمتر از یک درصد بوده و به سمت صفر میل می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** سیلاب، مجرای ورودی، معادلات ناویر-استوکس، معادلات آب‌های کم‌عمق، نرم‌افزار استار سی‌دی.

**ارجاع:** مودی ص. مهدی‌زاده ح. و اژدری‌مقدم م. ۱۳۹۹. بررسی عددی جریان سیلاب در شبکه فاضلاب با در نظر گرفتن آثار مجرای ورودی. مجله پژوهش آب ایران. ۳۹: ۶۷-۷۶.

۱- دانشجوی دکتری مهندسی عمران - مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان.

۲- دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند.

۳- استاد گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان.

\* نویسنده مسئول: [hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir](mailto:hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir)

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۲

## مقدمه

افزایش تناوب و شدت سیلاب‌های جهانی در سال‌های اخیر، موجب شده است تا پژوهشگران در پی یافتن راه‌هایی برای کاهش آثار ناشی از آن برآیند. سیلاب‌های شهری زمانی اتفاق می‌افتند که حجم آب از ظرفیت سیستم‌های زهکشی تجاوز کند. بر همین اساس مدل‌های هیدرولیکی مختلفی برای ارزیابی احتمال این پیشامد گسترش یافته است. این نوع مدل‌ها معمولاً از معادلات سرریز/روزنه<sup>۱</sup> در محل مجرای ورودی برای ارتباط جریان لوله‌ای در زیر زمین و جریان سطحی استفاده می‌کنند (لاندرو و همکاران، ۲۰۰۹؛ لی و همکاران، ۲۰۱۶؛ ماکسیموویچ و همکاران، ۲۰۰۹). بدین‌صورت که دبی برهم‌کنش به‌صورت یک مؤلفه منبع در مدل جریان سطحی اضافه می‌شود (سیوم و همکاران، ۲۰۱۱؛ چن و همکاران، ۲۰۱۶؛ لاندرو و مارتینز، ۲۰۱۶؛ مارتینز و همکاران، ۲۰۱۸؛ لی و همکاران، ۲۰۱۳؛ اشمیت و همکاران، ۲۰۰۴).

مجراهای ورودی، از رایج‌ترین بخش‌های شبکه‌های زهکشی شهری هستند که معمولاً در تغییرات شیب و برای لوله‌های فاضلاب و همچنین در فواصل مناسب در طول لوله‌ها قرار داده می‌شوند. الگوی جریان در مجرای ورودی به‌خصوص در جریان‌ات با دبی زیاد، پیچیده بوده و شامل پدیده‌های هیدرولیکی مختلفی از جمله برخورد موضعی جریان، چرخش، تداخل هوا و اختلاط با رسوب می‌شود (بگ و همکاران، ۲۰۱۸).

روش‌های مختلفی برای حل عددی پدیده‌های فیزیکی از جمله سیلاب برای فهم مؤثر ساز و کار آن گسترش یافته است. این روش‌های شبیه‌سازی باید توانایی پیش‌بینی شیوه برخورد امواج و در ادامه پخش سیلاب در بستر خشک‌اتر با لحاظ کردن مؤلفه اصطکاک را داشته باشند. به‌طورکلی می‌توان این حالت را با حل معادلات ناویر-استوکس با قابلیت سطح آزاد مدل کرد. این در حالی است که حل این معادلات به‌خصوص در حالت سه‌بعدی، بسیار پیچیده و زمان‌بر است. به‌عنوان یک تقریب مناسب، می‌توان از معادلات آب‌های کم‌عمق با فرض فشار هیدرواستاتیک استفاده کرد. این معادلات یک مجموعه از معادلات هذلولی در حالت بقا بوده و در حالتی که نسبت عمق به پهنای جریان کم باشد، توانایی تقریب

هیدرودینامیک جریان را دارند. برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق از روش‌های عددی مختلفی استفاده می‌شود که در این بین، روش حجم محدود بیشتر مورد استقبال قرار گرفته است. در این پژوهش از یک نسخه از الگوریتم پخش موج به نام روش موج شار استفاده می‌شود. این روش برای کنترل مؤلفه‌های منبع در عین حفظ مشخصات بقایی بسیار مناسب است. این روش بعدها برای رفع بعضی محدودیت‌ها، با استفاده از ترکیبی از حل‌کننده‌های ریمان دقیق و تقریبی، گسترش یافت (بیل و همکاران، ۲۰۰۳). تفاوت عمده روش‌های حل معادلات آب‌های کم‌عمق، محاسبه مؤلفه‌های شار و سرعت انتشار امواج ایستا<sup>۲</sup> و انبساطی<sup>۳</sup> برای مسأله ریمان است. در سال‌های اخیر توسعه‌های مختلفی از الگوریتم پخش موج تغییر یافته برای مدل‌سازی سیلاب (جورج، ۲۰۰۸؛ مهدی‌زاده و همکاران، ۲۰۱۱-a؛ مهدی‌زاده و همکاران، ۲۰۱۱-b)؛ معادلات جریان گذار در لوله‌ها (مهدی‌زاده و همکاران، ۲۰۱۸؛ مهدی‌زاده، ۲۰۱۸؛ مهدی‌زاده، ۱۳۹۶) و حل معادلات اولر (بیل و همکاران، ۲۰۰۳؛ مودی و مهدی‌زاده، ۱۳۹۷) ارائه شده است. در الگوریتم پخش موج، محاسبه سرعت انتشار امواج بر مبنای حل‌های تحلیلی صورت انجام می‌شود. این روش در بسیاری از موارد بسیار دقیق و قادر به مدل‌سازی جریان روی سطوح خشک یا نزدیک به خشک است. الگوریتم پخش موج، از نوعی سرعت انتشار استفاده می‌کند که ترکیبی از سرعت‌های تقریبی و دقیق ریمان بوده و از لحاظ محاسباتی نسبتاً پیچیده است (مهدی‌زاده و همکاران، ۲۰۱۱).

مهدی‌زاده و همکاران (۲۰۱۱-b) با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق یک‌بعدی، جریان خروجی از شبکه فاضلاب اشباع و پخش آن روی سطح خشک و تر و برهم‌کنش آن با جریان سیلاب را مدل‌سازی و نتایج حاصل را با نتایج معادلات ناویر-استوکس مقایسه کردند. آنان سپس روش آب‌های کم‌عمق را به حالت دوبعدی گسترش دادند و حل‌کننده شبکه لوله را با جریان سطح آزاد ترکیب کردند. همچنین پخش جریان ناشی از شکست سد دوبعدی روی سطح خشک و برهم‌کنش آن با دبی خروجی از مجرای ورودی را مدل‌سازی نمودند

2- Shock waves

3- Rarefaction wave

1- Weir/Orifice

معادلات ناویر- استوکس در وضعیت بدون لغزش<sup>۲</sup> مقایسه می‌گردند. برای سنجش میزان صحت نتایج به دست آمده از حل معادلات آب‌های کم‌عمق، از نرم‌افزار استار سی‌دی استفاده می‌شود که یک نرم‌افزار تجاری است و معادلات ناویر- استوکس را در حالت سه‌بعدی حل می‌کند. گفتنی است برای مدل‌سازی جریان آزاد توسط معادلات ناویر- استوکس و در روش حجم محدود از الگوریتم واف<sup>۳</sup> استفاده می‌شود که یک تکنیک برای مدل‌سازی مسائل دارای سطح آزاد یا سطح مشترک سیال-سیال است. ساختار این مقاله بدین‌صورت می‌باشد: ابتدا به معرفی معادلات حاکم آب‌های کم‌عمق با مؤلفه‌های منبع مرتبط به جریان ورودی و خروجی پرداخته می‌شود. سپس الگوریتم پخش موج و روش موج شار بیان و در ادامه معادلات مجرای ورودی تعریف و در نهایت نتایج عددی بیان می‌شوند.

## مواد و روش‌ها

### معادلات آب‌های کم‌عمق

شکل کلی معادلات آب‌های کم‌عمق به فرم زیر است (لوک، ۲۰۰۲؛ تورو، ۲۰۰۱):

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= f_1, \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= f_2 \end{aligned} \quad (1)$$

در این معادلات،  $h$  میزان عمق آب،  $u$  سرعت جریان در جهت  $x$  و  $g$  شتاب گرانش هستند. همچنین  $\phi_1$  و  $\phi_2$  مؤلفه‌های منبع در معادلات پیوستگی و مومنتم هستند. برای مطالعه دبی خروجی، اطمینان از منفی نشدن عمق و حفظ دقت مدل تحت تأثیر برهم‌کنش حفره‌ها، ضروری است.

### الگوریتم پخش موج

یک نوع از روش حجم محدود گودونو، به نام الگوریتم پخش موج گودونو شناخته می‌شود که در این‌جا مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش را برای اولین بار لوک معرفی کرد و حالت گسسته صریح آن عبارت است از (لوک، ۱۹۹۸):

(مهدی‌زاده و همکاران، ۲۰۱۱-b). کسروانی و همکاران (۲۰۱۵) با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق با عمق متوسط، جریان سیلاب را مدل‌سازی کردند که در آن، جریان آب خروجی از مجرای فاضلاب، به‌عنوان یک مؤلفه منبع اضافی در نظر گرفته شد. آنان از یک روش تسخیر موج ایستای حجم محدود برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق روی یک شبکه دوبعدی غیریکنواخت مطابق مدل فیزیکی، استفاده و نتایج عددی را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. همچنین جریان ورودی به یک مخزن در حالت خشک و تر مدل‌سازی شده است (مودی و همکاران، ۱۳۹۶؛ مودی و مهدی‌زاده، ۱۳۹۷). مهدی‌زاده و همکاران (۱۳۹۶) برخورد دو جریان سیلاب در یک مقطع مستطیلی با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق و روش اچ‌ال‌ال‌سی را نیز بررسی کردند.

هدف اصلی در مقاله حاضر معرفی یک مدل از آب‌های کم‌عمق برای مدل‌سازی جریان در شبکه فاضلاب با در نظر گرفتن آثار مجراهای ورودی است. در این‌جا برای شبیه‌سازی جریان در شبکه فاضلاب از روش پخش موج تغییر یافته استفاده شده است. مدل معرفی شده در این پژوهش، خوش‌توازن و قادر است با استفاده از ترکیب سرعت‌های مختلف ریمان، پخش جریان و همچنین برخورد جریان‌های مختلف را روی سطوح خشک پیش‌بینی کند. به‌علاوه، الگوریتم عددی استفاده شده قادر است در حضور مؤلفه‌های منبع همانند اصطکاک، رفتار مناسبی از خود بروز دهد. برای مدل‌سازی مجراهای ورودی به فاضلاب از یک حل‌کننده معادلات دیفرانسیل معمولی<sup>۱</sup> استفاده شده است. بر اساس اطلاع نویسندگان، تاکنون هیچ توسعه‌ای از معادلات آب‌های کم‌عمق بر اساس الگوریتم پخش موج برای در نظر گرفتن برخورد‌های پیچیده در شبکه فاضلاب و همچنین با در نظر گرفتن اثر مجرای ورودی به فاضلاب ارائه نشده است. در پژوهش حاضر، یک شبکه فاضلاب شامل یک مجرای ورودی بررسی می‌شود. جریان آب با عرضی برابر با پهنای دهانه مجرا، وارد شبکه می‌شود و پس از عبور از مجرا و رسیدن به کف کانال زیرین، شروع به پخش روی سطح خشک می‌کند. همچنین آثار عبارات اصطکاک در نظر گرفته شده در معادلات آب‌های کم‌عمق با نتایج حاصل از

2- No slip condition  
3- VOF (Volume of Fluid)

1- ODE Solver

سلول وجود دارند. شارهای اصلاحی  $\tilde{F}_{i\pm 1/2}^n$  بر اساس امواج شار به صورت معادله زیر محاسبه می‌شوند:

$$\tilde{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |s_k|) X_{k,i-1/2}^n \quad (۶)$$

که  $\xi_{k,i-1/2}$  موج شار محدودشده و با استفاده از محدودکننده‌های شار مختلف قابل محاسبه است.

### شرایط مرزی

به عنوان شرایط مرزی برای الگوریتم پخش موج اصلاح شده با اعمال محدودکننده‌ها، باید دو سلول خیالی<sup>۱</sup> در هر یک از مرزها تعریف کرد؛ چرا که این الگوریتم، پنج‌گرهی است. این سلول‌های خیالی، امکان ایجاد جریان ورودی و خروجی به محدوده محاسباتی و همچنین دیوار را فراهم می‌آورند. با برون‌یابی مرتبه صفر شرایط مرزی و با برابر قرار دادن  $U_0$  و  $U_{-1}$  به ترتیب با  $U_1$  و  $U_2$  به صورت زیر، می‌توان به شرایط مرزی غیربازتابی<sup>۲</sup> رسید (لوک، ۱۹۹۸). با انعکاس داده‌های داخلی در مرز، یک دیوار مرزی یکپارچه مدل می‌شود:

$$h_0 = h_1, \quad h_{-1} = h_2 \quad (۷)$$

$$(hu)_0 = (hu)_1, \quad (hu)_{-1} = (hu)_2$$

### شرایط پایداری

برای الگوریتم پخش موج یک‌بعدی، عدد کورانت به صورت زیر و برای بررسی پایداری تعریف می‌شود. به عنوان یک شرط لازم، این عدد باید کوچک‌تر مساوی یک باشد:

$$Cr = \max(s_{k,i-1/2}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (۸)$$

### معادلات مجرای ورودی

برای بررسی وضعیت جریان در درون مجرای ورودی، از دستگاه معادلات معمولی ارائه شده توسط بورشه و کلار (۲۰۱۴) استفاده شده که عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} h_M^j \\ Q_M^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Q_M^j + Q_{ext}^j}{A_M^j} \\ \frac{g A_M^j}{h_M^j} (\bar{h}_{node}^j - \bar{h}_M^j) - \Delta L_M^j \end{pmatrix} \quad (۹)$$

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= U_i^n \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta U_{i-1/2} + A^- \Delta U_{i+1/2}) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_{i-1/2}^n - \tilde{F}_{i+1/2}^n) \end{aligned} \quad (۲)$$

در معادله فوق،  $U_i^n$  تقریب متوسط بردار مجهولات در زمان  $t = n\Delta t$  و  $\Delta x$  و  $n$  به ترتیب گام زمانی، گام مکانی و سطح زمانی هستند.  $i$  مربوط به ابتدای سلول است. به همین صورت  $i-1/2$  به معنای وسط سلول قبل و  $i+1/2$  وسط سلول بعد است. همچنین  $A^+ \Delta U_{i-1/2}$  و  $A^- \Delta U_{i+1/2}$  به ترتیب نوسانات راست و چپ‌رونده و  $\tilde{F}_{i\pm 1/2}^n$  شارهای اصلاحی مرتبه دوم موردنیاز برای رسیدن به حل با مرتبه بالا هستند.

### روش موج شار

لوک و پلانتی (۲۰۰۱) تجزیه‌ای به فرم معادله زیر ارائه کردند:

$$\begin{bmatrix} U_i - U_{i-1} \\ F(U_i) - F(U_{i-1}) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{2m} \mathbf{b}_{k,i-1/2} \begin{bmatrix} r_{k,i-1/2} \\ h_{k,i-1/2} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

که در آن  $\eta_{k,i-1/2} = s_{k,i-1/2} r_{k,i-1/2}$  است. معادله (۵) به این معنا است که هر پرشی در شارها یا بردار مجهولات، می‌تواند به عنوان یک مجموعه از امواج ریمان یا امواج شار، از سطح مشترک  $i-1/2$  منتشر شده و دسته کلی‌تری از حل‌کننده‌های ریمان را بر اساس الگوریتم پخش موج تعریف کند.  $A^\pm \Delta U_{i\pm 1/2}$  را می‌توان با حل مسأله ریمان در هر مرز سلولی به دست آورد (لوک، ۲۰۰۲):

$$\begin{aligned} A^- \Delta U_{i-1/2} &= \sum_{k: s_{k,i-1/2} < 0} \mathbf{x}_{k,i-1/2} \\ A^+ \Delta U_{i-1/2} &= \sum_{k: s_{k,i-1/2} > 0} \mathbf{x}_{k,i-1/2} \end{aligned} \quad (۴)$$

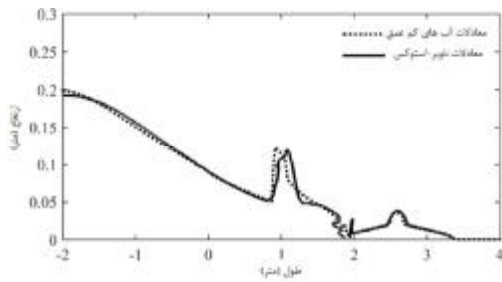
در معادله فوق  $\xi_{k,i-1/2}$  موج شار نامیده می‌شود که این امواج با سرعت  $s_{k,i-1/2}$  منتشر می‌شوند و به صورت  $\xi_{k,i-1/2} = \alpha_{k,i-1/2} \eta_{k,i-1/2}$  به دست می‌آیند؛ بنابراین دومین مؤلفه معادله (۵) را می‌توان به صورت یک معادله مجزا بیان کرد؛ به طوری که

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) = \sum_{k=1}^m \mathbf{x}_{k,i-1/2} \quad (۵)$$

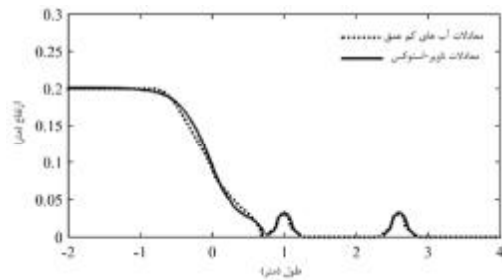
معادله فوق، معادله کلی روش موج شار است. در این روش امواج شار به جای امواج ریمان در داخل هر سطح مشترک

1- Ghost Cell

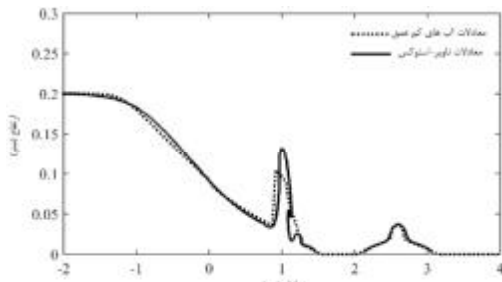
2- Non-reflecting boundary conditions



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲- مقایسه نتایج معادلات آب های کم عمق و ناویر- استوکس برای برهم کنش جریان ناشی از شکست سد با جریان خروجی از دو مجرای فاضلاب در (الف) ۰/۴، (ب) ۰/۸ و (ج) ۱/۲ ثانیه

همان گونه که در شکل ۲ دیده می شود، جریان ورودی از کف و شکست سد هم زمان شروع به حرکت می کند. برهم کنش میان جریان شکست سد و جریان خروجی اول، در زمان  $t=0/4$  ثانیه رخ می دهد و در  $0/6$  ثانیه، دو جریان که با یکدیگر ادغام شده اند، به پیشانی حرکت جریان خروجی دوم می رسند و دوباره با یکدیگر برهم کنش می کنند. برای معادلات آب های کم عمق از شبکه با  $512$  سلول استفاده شده است. همچنین در مدل نرم افزار استار سی دی از شبکه ای با  $dx=0/05$  متر استفاده شده است که این مقدار در نقاط برهم کنش، به نصف تقلیل پیدا کرده است. خطا نیز با استفاده از فرمول زیر محاسبه می شود:

و در آن  $h_M$  نشان دهنده ارتفاع آب در مجرای ورودی،  $Q_M$  و  $Q_{ext}$  به ترتیب دبی ورودی به مجرا از پایین و بالا،  $A_M$  سطح مقطع مجرا،  $\bar{h}_M$  هد هیدرولیکی مجرا و  $\bar{h}_{node}$  هد هیدرولیکی نقاط تقاطع هستند. پارامتر  $z$  مربوط به شماره مجرای ورودی است که در این پژوهش برابر یک در نظر گرفته می شود.  $\Delta L_M$  نیز مربوط به اصطکاک در مجرا که عبارت است از:

$$\Delta L_M^j = \frac{I_{DW}^j U_M^j Q_M^j |Q_M^j|}{8 (A_M^j)^2} \quad (10)$$

$\lambda_{DW}$  ضریب دارسی وایسباخ و  $U_M$  قطر مجرا است. برای حل این دستگاه معادلات از روش رانگ- کوتا مرتبه چهارم استفاده می شود.

## نتایج و بحث

### صحت سنجی

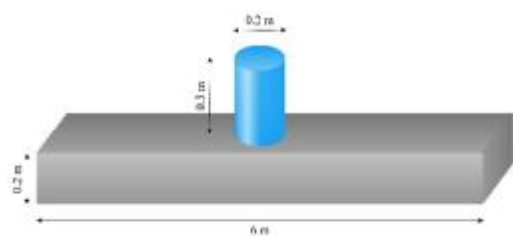
در این بخش برای ارزیابی صحت و کیفیت حل عددی، یک حالت آزمایشی بررسی می شود. این نمونه آزمایشی عبارت است از: برهم کنش جریان خروجی از دو مجرای فاضلاب با جریان ناشی از شکست سد که شماتیک آن در شکل ۱ نشان داده شده است. طول دامنه محاسباتی ۶ متر است. حجم آب به ارتفاع  $0/2$  و طول ۲ متر در سمت چپ قرار دارد و در لحظه  $t=0$  ثانیه شروع به پخش می کند. دهانه های خروجی آب از کف هرکدام به اندازه  $0/2$  متر هستند که مراکز آن ها در  $x=1$  و  $x=2/6$  متر قرار داده شده اند. همچنین جریان آب از کف با سرعت  $0/1$  متر بر ثانیه خارج می شود. سطح بالایی مدل در نرم افزار استار سی دی به شرط مرزی Pressure اختصاص داده شده است. در سمت چپ مدل (پشت حجم آب) و کف نیز شرط مرزی Wall استفاده شده است. در شکل ۲، نتایج حل عددی در مقایسه با نتایج حل معادلات ناویر- استوکس به دست آمده از نرم افزار استار سی دی در زمان های مختلف ارائه شده اند.



شکل ۱- نمایش شماتیک حالت آزمایشی برخورد شکست سد با دو جریان خروجی از کف (الف)

بعضی نقاط، به منظور ارائه نتایج دقیق‌تر، ریزتر نیز شده است. مدل شامل دو سیال آب و هوا و پردازش در حالت گذار انجام شده است. تیرانس باقی مانده برابر ۰/۰۱ و حداکثر تعداد تکرارهای هر مرحله از گام‌های زمانی، ۲۵ می‌باشد. همچنین از الگوریتم SIMPLE برای حل معادلات استفاده شده است. فاکتور تخفیف برای مومنتم در هر دو جهت برابر ۰/۷ و برای فشار ۰/۳ در نظر گرفته شده است. گام زمانی نیز برابر با ۰/۰۰۱ است. از شرایط مرزی Wall برای کف و بالای کانال زیرین و همچنین کناره‌های مجرای ورودی استفاده شده که جریان در مجاورت دیوارها دارای اصطکاک است. سطح فوقانی مجرای ورودی دارای شرایط مرزی Inlet بوده و در دو طرف کانال زیرین، Pressure در نظر گرفته می‌شود.

در مدل آب‌های کم‌عمق برای اجتناب از نتایج غیر فیزیکی، از شرایط آن‌تروپی هارتن (۱۹۹۷) به همراه الگوریتم پخش موج استفاده شده است. تعداد سلول‌های مورد استفاده و ضریب اصطکاک به ترتیب برابر ۵۱۲ و ۰/۰۱۲ در نظر گرفته شده‌اند. برای برقراری پایداری، عدد کورانت برابر ۰/۵ در نظر گرفته می‌شود. زمان اجرای مدل با پردازنده core i7-3770 و ۸ گیگابایت رم، برای معادلات آب‌های کم‌عمق و ناویر- استوکس نیز به ترتیب برابر با ۳۴/۹۲ و ۷۰۳/۷۴ ثانیه می‌باشد.



شکل ۳- نمایش شماتیک شبکه مورد استفاده

شکل ۴ مقایسه نتایج حل با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق و معادلات ناویر- استوکس برای پروفیل آب در زمان‌های مختلف را نشان می‌دهد. مجموع ارتفاع مجرا و کانال زیرین برابر با ۰/۵ متر می‌باشد؛ اما در شکل فوق، برای وضوح بیشتر شکل، تا ارتفاع ۰/۳ متر در نظر گرفته شده است. میزان ارتفاع در معادلات آب‌های کم‌عمق نمی‌تواند کمتر از صفر باشد که اصطلاحاً به آن عمق مثبت<sup>۲</sup> می‌گویند؛ بنابراین توانایی مدل‌سازی سقوط

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_{N-S} - y_{SWE})^2}{n}} \quad (11)$$

که در آن  $y_{N-S}$  ارتفاع آب در مدل نرم‌افزار استار سی‌دی،  $y_{SWE}$  ارتفاع آب در مدل آب کم‌عمق و  $n$  تعداد نقاط است. مقادیر خطا برای شکل ۲ در جدول ۱ مشخص شده است.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، مطابقت بالایی میان نتایج وجود دارد که نشان‌دهنده صحت مدل عددی است.

#### جدول ۱- خطای مقایسه نتایج معادلات آب‌های کم‌عمق و

معادلات ناویر- استوکس برای حالت برهم‌کنش جریان ناشی از شکست سد با دو جریان خروجی از کف در زمان‌های مختلف

زمان (ثانیه)	تعداد نقاط	خطا
۰/۴	۴۸۶۱	۰/۰۰۱۵۳
۰/۸	۵۲۳۱	۰/۰۰۱۸۹
۱/۲	۵۶۰۱	۰/۰۰۱۹۸

#### بررسی حالت وجود مجرای ورودی

در این پژوهش یک شبکه فاضلاب شامل یک مجرای ورودی به طول ۰/۳ و قطر ۰/۲ متر و کانال زیرین آن به عرض ۶ و ارتفاع ۰/۲ متر فرض و نمایش شماتیک آن در شکل ۳ نشان داده شد. جریان با سرعت ۱ متر بر ثانیه وارد مجرا شد. پس از عبور از آن، در کانال زیرین شروع به پخش می‌کند. برای این حالت یک عدد بدون بعد به نام عدد مجرای ورودی<sup>۱</sup> با یک فرمول‌بندی جدید به صورت  $MN = \sqrt{g l^2 / H V}$  تعریف شده است که در آن  $g$  شتاب ثقلی و برابر ۹/۸۰۶۶ متر بر مجذور ثانیه،  $l$  طول دهانه به متر،  $H$  ارتفاع سقوط بر حسب متر و  $V$  سرعت ورود آب به داخل مجرای ورودی بر حسب متر بر ثانیه است. طبق این تعریف، عدد مجرای ورودی در این مسأله برابر ۰/۸۹ است. نتایج عددی حاصل، با نتایج حاصل از حل معادلات ناویر- استوکس به دست آمده از نرم‌افزار استار سی‌دی در حالت سه‌بعدی مقایسه می‌شود. جریان در این نرم‌افزار به صورت سطح آزاد است و برای تسخیر این سطح آزاد، از روش حجم سیال (VOF) استفاده می‌شود. مقدار حجم سیال برای سطح مشترک برابر با ۰/۵ است. همچنین از شرایط مرزی غیرلغزشی در مرزهای جامد و مدل آشفستگی کی‌پسپلون با عدد رینولدز بالا استفاده شده است. گام مکانی استفاده شده در این نرم‌افزار برابر ۰/۰۱ متر که در

2- depth-positive

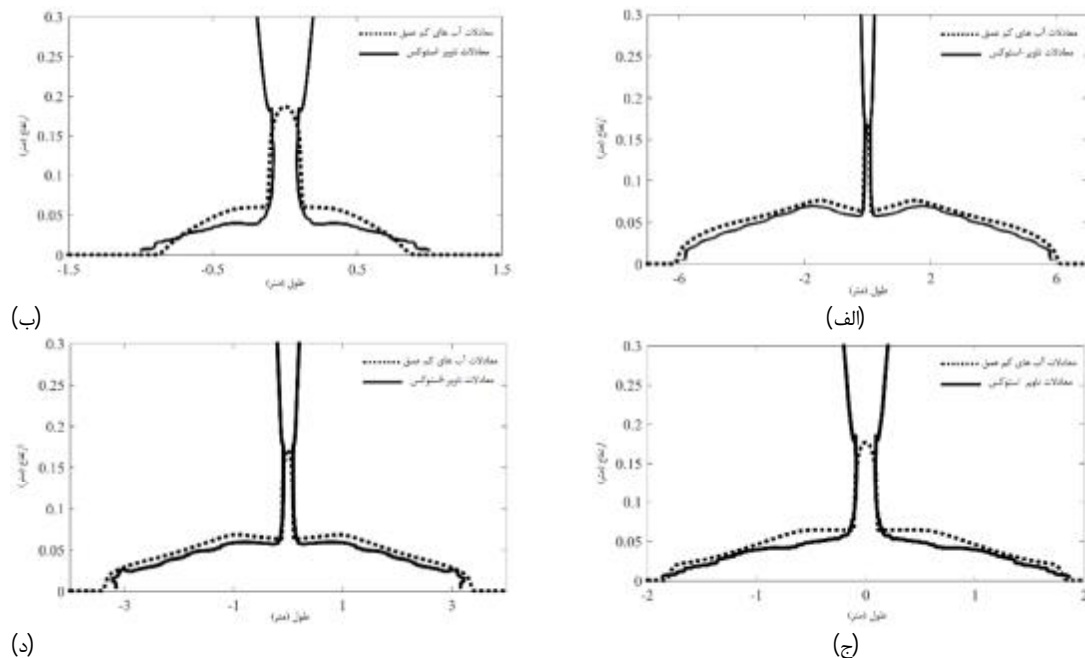
1- Manhole Number

محاسبه شده است در حالی که در مدل آب‌های کم‌عمق از عبارات اصطکاک پایدار مطابق معادله (۳) می‌باشد که لزجت ایدی و گرادیان سرعت برخلاف معادلات ناویر-استوکس در محاسبه تنش برشی تأثیری ندارد. دلیل دیگر نیز می‌تواند مربوط به عدم توانایی معادلات آب‌های کم‌عمق در مدل‌سازی سقوط جریان آزاد باشد؛ در حالی که نرم‌افزار استار سی‌دی قادر به شبیه‌سازی سقوط است. مقدار خطا با روش RMSE محاسبه و در جدول ۲ ارائه شده است.

همان‌گونه که در شکل ۴ و جدول ۲ مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست‌آمده از نرم‌افزار با نتایج حاصل از معادلات آب‌های کم‌عمق به‌طور مناسبی مطابقت دارند.

طبق بررسی‌های انجام‌شده و حل‌های عددی گوناگونی که با تغییر پارامترهای سرعت ورودی، اندازه دهانه و ارتفاع سقوط مورد آزمایش قرار گرفتند. چنانچه  $MN \leq 0.98$  باشد، همخوانی مناسبی میان نتایج معادلات آب‌های کم‌عمق و معادلات ناویر-استوکس برقرار خواهد بود؛ به‌گونه‌ای که مقادیر درصد و یا نرم خطا مانند مقادیر موجود در جدول فوق باشد.

آب با آن وجود نخواهد داشت. برای رفع این مشکل، جریان سقوط را به صورت جریان خروجی از کف شبیه‌سازی می‌کنند. این در حالی است که توانایی مدل‌سازی سقوط در مدل نرم‌افزاری استار سی‌دی که حل‌کننده معادلات ناویر-استوکس می‌باشد، وجود دارد. بنابراین تفاوت دو مدل در محل مجرای ورودی ناشی از این حقیقت است. در ادامه و در حالت پخش جریان روی سطح، تأثیر این تفاوت در مدل‌سازی، به حداقل می‌رسد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، آب پس از سقوط از مجرای ورودی، به کانال زیرین وارد و به‌صورت متقارن به دو سمت منتشر می‌شود. در زمان  $t=0.5$  ثانیه تفاوت اندکی در نتایج معادلات آب‌های کم‌عمق و ناویر-استوکس در میزان حرکت جبهه آب وجود دارد که می‌تواند در اثر شتاب ناشی از سقوط و اختلاف در مؤلفه اصطکاک استفاده شده در نرم‌افزار و مدل عددی باشد. این اختلاف در زمان‌های بالاتر به حداقل می‌رسد. علت اصلی کاهش تفاوت در زمان‌های بالاتر، نزدیک شدن عبارات اصطکاک معادلات ناویر-استوکس به شرایط پایدار است. گفتنی است عبارت اصطکاک و لزجت در معادلات ناویر-استوکس به‌صورت ناپایدار که در این‌جا توسط مدل کی‌اِپسیلون

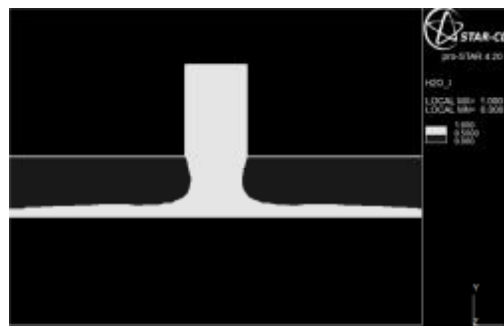


شکل ۴- مقایسه نتایج معادلات آب‌های کم‌عمق و ناویر-استوکس برای ورود آب به مجرای ورودی و پخش موج در کانال زیرین در (الف) ۰/۵، (ب) ۱، (ج) ۲ و (د) ۴ ثانیه

جریان خروجی از شبکه فاضلاب، حدود یک‌هزارم و برای حالت شبکه فاضلاب با اثر مجرای ورودی، کمتر از یک درصد است و در زمان‌های بالاتر به سمت صفر میل می‌کند. به‌طور کلی موارد عدم تطابق در نتایج می‌تواند ناشی از تفاوت مؤلفه‌های اصطکاک در دو مدل و همچنین وجود شتاب ناشی از سقوط در مدل نرم‌افزاری باشد؛ زیرا به دلیل عمق مثبت بودن معادلات آب‌های کم‌عمق، حالت سقوط آب به‌صورت جوشش از کف در نظر گرفته شده است. این در حالی است که این سقوط آزاد به‌طور کامل در نرم‌افزار استار سی‌دی لحاظ می‌شود. همچنین برای هماهنگ کردن دو مدل، زمان شروع محاسبه در نرم‌افزار استار سی‌دی از هنگام رسیدن جریان آب به کف محاسبه شده است. یک عدد بدون بعد به نام عدد مجرای ورودی نیز بر حسب ارتفاع مجرا و کانال زیرین، قطر دهانه مجرا و سرعت ورود آب به مجرا برای شبکه تعریف شد. به همراه این عدد و پس از آزمایش‌های عددی مختلف انجام‌گرفته با تغییر متغیرهای رابطه ارائه شده، یک محدوده نیز تعریف شده است. در صورتی که پس از جای‌گذاری مشخصات هر شبکه در رابطه مذکور، عددی در این محدوده به دست آید، نتایج معادلات آب‌های کم‌عمق و ناویر-استوکس از مطابقت مناسبی برخوردار خواهند بود. همان‌گونه که گفته شد، حل معادلات ناویر-استوکس زمان‌بر است که این مهم نیز با محاسبه زمان اجرای مدل عددی و نرم‌افزاری نشان داده شده است. این در حالی است که با ریز کردن شبکه یا کاهش تلورانس باقیمانده، این زمان به مقدار قابل‌توجهی افزایش می‌یابد.

### منابع

۱. مودی ص. اژدری مقدم م. و مهدی‌زاده ح. ۱۳۹۶. مدل‌سازی عددی جریان ورودی به یک مخزن با بستر مرطوب با استفاده از یک الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده. مجله مهندسی مکانیک مدرس. ۱۷(۴): ۱۶۸-۱۷۶.
۲. مودی ص. و مهدی‌زاده ح. ۱۳۹۷. مدل‌سازی عددی جریان ورودی به مخزن با بستر خشک با استفاده از الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده. مجله مهندسی مکانیک مدرس. ۱۸(۶): ۱۸۲-۱۹۰.
۳. مهدی‌زاده ح. ۱۳۹۶. حل معادلات ضربه قوچ دوبعدی با استفاده از شارموج تغییر یافته و مدل



شکل ۵- نتیجه دوبعدی استار سی‌دی برای ورود آب به مجرای ورودی و پخش موج در کانال زیرین در ۰/۵ ثانیه

جدول ۲- خطای مقایسه معادلات آب‌های کم‌عمق و معادلات ناویر-استوکس برای ورود آب به مجرای ورودی و پخش موج در کانال زیرین

خطا	تعداد نقاط	زمان (ثانیه)
۰/۰۰۹۸۷	۲۰۳۱	۰/۵
۰/۰۰۷۱۰	۳۷۵۱	۱
۰/۰۰۵۶۵	۶۵۷۱	۲
۰/۰۰۴۹۳	۱۱۱۸۵۱	۴

### نتیجه‌گیری

از اساسی‌ترین مشکلات در زمینه علوم آب و مدیریت شهری، کنترل سیلاب است و فهم بهتر و بیشتر آثار مجرای ورودی، از مهم‌ترین اجزای یک شبکه فاضلاب، ضروری به نظر می‌رسد. هنگام ورود آب به شبکه فاضلاب، حالت‌های پیچیده‌ای از جریان به وجود می‌آید که از دید مدل‌سازی هیدرولیکی دشوار است. این پیچیدگی به‌طور کلی ناشی از مکانیزم‌های مختلف جریان هنگام ورود به شبکه و سپس در هنگام پخش و برخورد توده‌های جریان است. همچنین مؤلفه‌های اصطکاک و عوارض بستر، بر این پیچیدگی می‌افزایند. در مقاله حاضر، ابتدا برخورد جریان ناشی از شکست سد با دو جریان خروجی از شبکه فاضلاب شبیه‌سازی شد. سپس رفتار جریان آب در یک شبکه فاضلاب با استفاده از یک الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده برای جریان در سطح و کانال زیرین، و معادلات ارائه شده توسط بورشه و کلار (۲۰۱۴) برای درون مجرای ورودی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاصل با نتایج معادلات ناویر-استوکس به‌دست‌آمده از نرم‌افزار استار سی‌دی مقایسه و همچنین خطای نتایج با استفاده از روش RMSE محاسبه و ارائه شد. به طوری که میزان خطا برای حالت برخورد جریان شکست سد با



14. Lee S. Nakagawa H. Kawaike K. and Zhang H. 2013. Experimental validation of interaction model at storm drain for development of integrated urban inundation model. *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. B1 (Hydraulic Engineering)*. 69(4): I\_109-I\_114.
15. Lee S. Nakagawa H. Kawaike K. and Zhang H. 2016. Urban inundation simulation considering road network and building configurations. *Journal of Flood Risk Management*. 9(3): 224-233.
16. LeVeque R. J. 1998. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm. *Journal of computational physics*. 146(1): 346-365.
17. LeVeque R. J. 2002. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge university press. 558 p.
18. LeVeque R. J. and Pelanti M. 2001. A class of approximate Riemann solvers and their relation to relaxation schemes. *Journal of Computational Physics*. 172(2):572-591.
19. Mahdizadeh H. 2018. Numerical modelling of one-and two-dimensional water hammer problems using a modified wave propagation algorithm and turbulence model. *Journal of Hydraulic Research*. 57(3): 374-385 .
20. Mahdizadeh H. Sharifi S. and Omidvar P. 2018. On the Approximation of Two-Dimensional Transient Pipe Flow Using a Modified Wave Propagation Algorithm. *Journal of Fluids Engineering*. 140(7): 071402.
21. Mahdizadeh H. Stansby P. K. Rogers B. D. 2011-a. On the approximation of local efflux/influx bed discharge in the shallow water equations based on a wave propagation algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 66(10): 1295-1314.
22. Mahdizadeh H. Stansby P. K. Rogers B. D. 2011-b. Flood wave modeling based on a two-dimensional modified wave propagation algorithm coupled to a full-pipe network solver. *Journal of Hydraulic Engineering*. 138(3): 247-259.
23. Maksimović Č. Prodanović D. Boonya-Aroonnet S. Leitão J. P. Djordjević S. and Allitt R. 2009. Overland flow and pathway analysis for modelling of urban pluvial flooding. *Journal of Hydraulic Research*. 47(4): 512-523.
24. Martins R. Leandro J. and Djordjević S. 2018. Influence of sewer network models on urban flood damage assessment based on coupled 1D/2D models. *Journal of Flood Risk Management*. 11: 717-728.
- آشفته بالدوین- لوماکس. مجله علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک. ۲۹(۱):۹۷-۱۱۰.
۴. مهدی‌زاده ح. چهاربیدی ه. و مودی ص. ۱۳۹۶. مدل‌سازی عددی پخش امواج سیلاب در شبکه‌های فاضلاب با استفاده از روش اچ‌ال‌ال‌سی تغییر یافته در حالت یک‌بعدی و دوبعدی. مجله مهندسی مکانیک مدرس. ۱۷(۷):۲۷۳-۲۷۳.
5. Bale D. S. LeVeque R. J. Mitran S. and Rossmanith J. A. 2003. A wave propagation method for conservation laws and balance laws with spatially varying flux functions. *SIAM Journal on Scientific Computing* 24(3): 955-978.
6. Beg M. N. A. Carvalho R. F. Tait S. Brevis W. Rubinato M. Schellart A. and Leandro J. 2018. A comparative study of manhole hydraulics using stereoscopic PIV and different RANS models. *Water Science and Technology*. 1: 87-98.
7. Borsche R. and Klar A. 2014. Flooding in urban drainage systems: coupling hyperbolic conservation laws for sewer systems and surface flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 76(11): 789-810.
8. Chen A. S. Leandro J. and Djordjević S. 2016. Modelling sewer discharge via displacement of manhole covers during flood events using 1D/2D SIPSON/P-DWave dual drainage simulations. *Urban Water Journal*. 13(8): 830-840.
9. George D. L. 2008. Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation. *Journal of Computational Physics*. 227(6): 3089-3113.
10. Harten A. 1997. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*. 135(2): 260-278.
11. Kesserwani G. Lee S. Rubinato M. and Shucksmith J. 2015. Experimental and numerical validation of shallow water flow around a surcharging manhole. *URBAN DRAINAGE MODELLING, UDM2015*. Org. 1: 145-154.
12. Leandro J. and Martins R. 2016. A methodology for linking 2D overland flow models with the sewer network model SWMM 5.1 based on dynamic link libraries. *Water Science and Technology*. 73(12): 3017-3026.
13. Leandro J. Chen A. S. Djordjević S. and Savić D. A. 2009. Comparison of 1D/1D and 1D/2D coupled (sewer/surface) hydraulic models for urban flood simulation. *Journal of hydraulic engineering*. 135(6): 495-504.

25. Schmitt T. G. Thomas M. and Etrich N. 2004. Analysis and modeling of flooding in urban drainage systems. *Journal of hydrology*. 299(3-4): 300-311.
26. Seyoum S. D. Vojinovic Z. Price R. K. and Weesakul S. 2011. Coupled 1D and noninertia 2D flood inundation model for simulation of urban flooding. *Journal of hydraulic engineering*. 138(1): 23-34.
27. Toro E. F. 2001. *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. John Wiley, New York. 309 p.